Merkzettel „Differentialrechnung“ II

14.02.2017

Grundlagen:

1. MWS	Sei f(x) stetig auf [a,b] und diff. auf (a,b): $\exists\xi \in (a,b)\colon \mathrm{f}'(\xi) = \frac{\mathrm{f}(b)-\mathrm{f}(a)}{b-a}$	Satz v. Rolle:	$\mathrm{f}(a) = \mathrm{f}(b)\colon \exists\xi \in (a,b)\colon \mathrm{f}'(\xi) = 0$
2. MWS	Sei f(x) stetig auf [a,b] und diff. auf (a,b): $\exists\xi \in (a,b)\colon \mathrm{f}'(\xi)\,(\mathrm{g}(b)-\mathrm{g}(a)) = \mathrm{g}'(\xi)\,(\mathrm{f}(b)-\mathrm{f}(a))$		
Stetig diff. auf (a,b):	$[\exists\, f'\,auf\ (a,b)\,] \wedge [f'\ stetig\ auf\ (a,b)]$	Stetig diff. auf [a,b]:	$[\text{stetig diff. auf } (a,b)] \wedge [\exists\ \mathrm{f}'(a_+), \mathrm{f}'(b_-)]$
$\text{stetig (partiell)differenzierbar} \Rightarrow \begin{cases} \exists \text{ alle Richtungsabl.} \\ \text{total diffbar} \\ \text{stetig} \end{cases}$	;	$\text{total differenzierbar} \Rightarrow \begin{cases} \text{stetig} \\ \text{part. diffbar} \end{cases}$	

Grundableitungen

$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(lg_a\,x)' = \frac{1}{x\ln a}$	$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$		$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$		$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$(\mathrm{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)' = \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$			$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$		
$(\tanh x)' = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)' = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$			$(\mathrm{cotanh}\, x)' = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)' = 1 - \mathrm{cotanh}^2 x = \frac{1}{\sinh^2 x}$		
$(\mathrm{arsinh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$(\mathrm{arcosh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ (x > 1)$		$(\mathrm{artanh}\, x)' = \frac{1}{1-x^2}\ (\lvert x\rvert < 1)$		$(\mathrm{arcoth}\, x)' = \frac{1}{1-x^2}\ (\lvert x\rvert > 1)$

Ableitungsmethoden:

$(fg)' = f'g + fg'$	$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$	$\left[f\big(g(x)\big)\right]' = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$
$(f^g)' = \left(g'\ln f + \frac{f'g}{f}\right) f^g$; $wegen\ Ansatz\colon y = f^g \ \rightarrow\ \ln y = g \ln f\ \rightarrow\ \frac{\ln y}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}y' = g'\ln f + \frac{1}{f}f'g$			

Ableitung von Funktionen in Parameterdarstellung in $\mathbb{R}^2$:

$$y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\dot{x}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \qquad y'' = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy'}{dt}\frac{1}{\dot{x}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$ (Cauchy-Riemann'sche Differenzialgleichungen):

Sei $\mathrm{f}(\underline{z}) = \mathrm{f}(x+iy) = \mathrm{u}(x,y) + i\,\mathrm{v}(x,y)$. Dann ist $\mathrm{f}(\underline{z})$ differenzierbar an der Stelle $\underline{z}_0 = x_0 + iy_0$, wenn gilt:
$u_x = v_y\,,\ u_y = -v_x$ und sowohl $\mathrm{u}(x,y)$ als auch $\mathrm{v}(x,y)$ sind in einer Umgebung von (x_0, y_0) stetig differenzierbar. $\Longrightarrow \Delta u \perp \Delta v$

Kurvendiskussion:

$y = \mathrm{f}(x)$:	$NST\colon\ \mathrm{f}(x_n) = 0;$ $E\colon \mathrm{f}'(x_e) = 0 \wedge [\mathrm{f}''(x_e) \neq 0 \vee erste\ an\ x_e\ nicht\ verschwindende\ Ableitung\ ist\ gerade]$ $MIN\colon\ \mathrm{f}''(x_e) > 0 \vee [\mathrm{f}''(x_e) = 0 \wedge erste\ an\ x_e\ nicht\ verschwindende\ Ableitung > 0\ (\text{"}Sattelpunkt\text{"})]$ $MAX\colon \mathrm{f}''(x_e) < 0 \vee [\mathrm{f}''(x_e) = 0 \wedge erste\ an\ x_e\ nicht\ verschwindende\ Ableitung < 0\ (\text{"}Sattelpunkt\text{"})]$ $W\colon \mathrm{f}''(x_w) = 0 \wedge [\mathrm{f}'''(x_w) \neq 0 \vee erste\ an\ x_w\ nicht\ verschwindende\ Ableitung\ ist\ ungerade.]$ Konvex auf Intervall I: $\mathrm{f}''(x) \geq 0$; strikt konvex: $\mathrm{f}''(x) > 0$; konkav: $\mathrm{f}''(x) \leq 0$; strikt konkav: $\mathrm{f}''(x) < 0$; $\forall x \in I$.		
$z = \mathrm{f}(x,y)$:	$E\colon L\ddot{o}se\ Gleichungssystem\ z_x(x,y) = 0;\ z_y(x,y) = 0 \rightarrow pr\ddot{u}fe\ ob\ z_{xx}(x_e,y_e)z_{yy}(x_e,y_e) - z_{xy}(x_e,y_e) > 0$ $MIN\colon z_{xx}(x_e,y_e) > 0;\quad MAX\colon z_{xx}(x_e,y_e) < 0$		
Hesse-Matrix von f(x,y):	$\mathrm{H}(\mathrm{f}(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$	Hesse-Matrix von f(x,y,z):	$\mathrm{H}(\mathrm{f}(x,y,z)) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix}$
$z = \mathrm{f}(\vec{r})$	$Station\ddot{a}rer\ Punkt\ \vec{r}_s\colon \vec{\nabla}\mathrm{f}(\vec{r}) = \vec{0}; GLS\ l\ddot{o}sen. \rightarrow \vec{r}_s$ $MIN\ (elliptisch)\colon \mathrm{H}(\mathrm{f}(\vec{r}_s))\ pos.def. \Leftrightarrow [\forall\colon \lambda > 0] \Leftrightarrow [\forall\colon \det(M_k) > 0] \Leftrightarrow \left[\vec{x}^T H\vec{x} > 0\ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}\right]$ $MAX\ (ellipt.)\colon \mathrm{H}(\mathrm{f}(\vec{r}_s))\ neg.def. \Leftrightarrow [\forall\colon \lambda < 0] \Leftrightarrow [\mathrm{sgn}(\det(M_k)) = (-1)^k, k = 1 \dots n] \Leftrightarrow \left[\vec{x}^T H\vec{x} < 0\ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}\right]$ $Sattelpkt.(hyperb.)\colon \mathrm{H}(\mathrm{f}(\vec{r}_s))\ indef.reg. \Leftrightarrow\ [\exists\colon \lambda < 0 \wedge \exists\colon \lambda > 0 \wedge \nexists\colon \lambda = 0] \Leftrightarrow [\det(\mathrm{H}(\mathrm{f}(\vec{r}_s))) < 0] \Leftrightarrow [\vec{x}^T H\vec{x} \in \mathbb{R}^{\pm}]$ $parabolisch\colon\ \mathrm{H}(\mathrm{f}(\vec{r}_s))\ singul\ddot{a}r\ \Leftrightarrow [\exists\colon \lambda = 0] \Leftrightarrow [\det(\mathrm{H}(\mathrm{f}(\vec{r}_s))) = 0]$		

Finden von Extremalstellen mit Nebenbedingungen mittels Lagrange-Multiplikatoren:

$Geg.\colon Funktion\ \ \mathrm{f}(x,y,z)\,; implizite\ Nebenbedingungen\ \ \varphi_i(x,y,z) = 0; i = 1 \dots n; f, \varphi_i\ stetig\ differenzierbar$
$\vec{\nabla}\big(\mathrm{f}(x,y,z) + \lambda_1(\varphi_1(x,y,z)) + \dots + \lambda_n(\varphi_n(x,y,z))\big) = 0 \rightarrow L\ddot{o}se\ GLS \rightarrow x_E, y_E, z_E$

Differentialgleichungen (Grad: Höchste Potenz von $y^{(n)}$; Ordnung bzw. Rang: Höchste Ableitung n von $y^{(n)}$)

Homogene DG erster Ordnung mit trennbaren Variablen	$y' = f(x,y)$	$Umformen\ zu\ \frac{1}{y}dy = f(x)\,dx \mid \int \rightarrow \ln y = \int f(x)$
Gleichgradige („homogene“) DG erster Ordnung	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	$Ansatz: z = \frac{y}{x} \rightarrow y = xz \rightarrow y' = x'z + z'x = z + \frac{dz}{dx}x$
Homogene DG zweiter Ordnung, die sich auf homogene DG erster Ordnung zurückführen lässt	$y'' = f(x)$	Zweimaliges Integrieren
	$y'' = f(x,y')$ $y'' = f(y)$ $y'' = f(y,y')$	$Ansatz: y' = p \rightarrow y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$
	$y'' = f(y')$	$Ansatz: y' = p \rightarrow y'' = \frac{dp}{dx}$
Inhomogene DG erster Ordnung mit konstantem Koeffizienten → Prama I, 5.1	$y' = ay + s(x)$	$y(x) = Ce^{ax} + \int_{u=0}^{x} e^{a(x-u)}\,s(u)\,du$
Inhomogene DG erster Ordnung mit variablem Koeffizienten → Prama I, 5.2	$y' = a(x)\,y + s(x)$	$y(x) = Ce^{\Lambda(x)} + \int_{u=0}^{x} e^{\Lambda(x)-\Lambda(u)}\,s(u)\,du$ $\Lambda(x) = \int_{\tau=0}^{x} a(\tau)\,d\tau;\ \Lambda(x) - \Lambda(u) = \int_{\tau=u}^{x} a(\tau)\,d\tau$
Inhomogene DG erster Ordnung mit variablem Koeffizienten -> „Variation der Konstanten“	$y' + a(x)y = s(x)$	$Ermittle\ y_h(x,C) \rightarrow Ansatz\ y_p(x,c(x))$ $Ableitungen\ in\ DG\ einsetzen \rightarrow$ $c'(x)\ bestimmen \mid \int \rightarrow c(x) \rightarrow y = y_h + y_p(x,c(x))$
Inhomogene DG zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten: -> „Variation der Konstanten“	$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = s(x)$	$Ermittle\ y_{h1}(x), y_{h2}(x) \rightarrow y_h = c_1\,y_{h1}(x) + c_2 y_{h2}(x)$ $Ansatz: y_p(x) = c_1(x)\,y_{h1}(x) + c_2(x)\,y_{h2}(x) \rightarrow$ $GLS: \boldsymbol{y_{h1}(x)\,c_1'(x) + y_{h2}(x)\,c_2'(x) = 0}$ $\boldsymbol{y_{h1}'(x)\,c_1'(x) + y_{h2}'(x)\,c_2'(x) = s(x)} \rightarrow$ $c_i'(x)\ bestimmen \mid \int \rightarrow c_i(x) \rightarrow y = y_h + y_p(x,c_i(x))$
Lineare DG erster oder höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten:	$y'' + a_1y' + a_2y = 0$	Char. Gleichung („CG“) $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$
	F1: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \wedge \lambda_1 \neq \lambda_2$	$y_h = C_1e^{\lambda_{1,}x} + C_2e^{\lambda_{2,}x} + \cdots$
Homogene Lösung	**F2**: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \wedge \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y_h = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x} + C_3x^2e^{\lambda x} + \cdots$
	F3: $\lambda_1 = \alpha + i\beta;\ \lambda_2 = \alpha - i\beta$	$y_h = e^{\alpha x}(C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x) + \cdots$
Inhomogene lineare DG erster oder höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten und speziellen Störfunktionen	$y'' + a_1y' + a_2y = s(x)$	Ansatz y_p (s.u.), ableiten, in DG einsetzen, Koeffizientenvergleich
	F1: $s(x) = Polynom\ Grad\ n$	$y_p = b_o + b_1x + b_2x^2 + - \cdots + b_nx^n$
	F2: $s(x) = ae^{\gamma x}$	- γ ist keine Wurzel der CG: $y_p = be^{\gamma x}$ - γ ist einfache Wurzel der CG: $y_p = bxe^{\gamma x}$ - γ ist doppelte Wurzel der CG: $y_p = bx^2e^{\gamma x}$
Inhomogene Lösung:	**F3**: $s(x) = a\sin\omega x + b\cos\omega x$	- $\sin\omega x$ und $\cos\omega x$ nicht in y_h: $y_p = A\sin\omega x + B\cos\omega x$ - $\sin\omega x$ oder $\cos\omega x$ Teil von y_h: $y_p = Ax\sin\omega x + Bx\cos\omega x$
	F4: Kombination aus F1, F2 und F3 (additiv oder multiplikativ)	Additive oder multiplikative Kombination aus den entsprechenden Ansätzen für y_p
Spezialansatz für inhomogene lineare DG erster Ordnung mit variablem Koeffizienten und Störfunktion der Form xy^n	$y' + a(x)y = xy^n$	$z = y^{1-n} \rightarrow berechne\ y(z) \rightarrow y' = \frac{dy}{dz}z' \rightarrow$ $DG\ z' + a(x)z = x \rightarrow lösen\ in\ z$
Homogene DGL der Form $\sum_{k=0}^{l} a_kx^k\,y^{(k)}(x) = 0$	$x^2y'' + a_1xy' + a_2y = 0$	Ansatz $y_h = cx^{\lambda}$, abl., einsetzen → CG: $\lambda(\lambda-1) + a_1\lambda + a_2 = 0$ $y_h = C_1x^{\lambda_{1,}} + C_2x^{\lambda_{2,}} + \cdots$
Inhomogene DGL der Form $\sum_{k=0}^{l} a_kx^k\,y^{(k)}(x) = bx^l$	$x^2y'' + a_1xy' + a_2y = bx^2$	$y_p = bx^2\ln(x)$; allgemein: $y_p = bx^l\ln(x)$
Exakte, nicht separable DG erster Ordnung	$p(x,y) + q(x,y)y' = 0 \rightarrow$ $p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = 0$ $wobei\ \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$	$Prüfe: \frac{\partial p}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial q}{\partial x} \rightarrow wenn\ nein: finde\ int. Faktor\ a(x,y) \rightarrow$ $\phi(x,y) = \int p(x,y)\,dx + C(y) = \int q(x,y)\,dx + D(x) \rightarrow$ $\rightarrow bestimme\ C(y)\ und\ D(x) \rightarrow löse\ \phi(x,y)\ nach\ y\ auf.$
Ermittlung des integrierenden Faktors	$\frac{\partial p}{\partial y} = p'(x) \wedge \frac{\partial q}{\partial x} = q'(x), oder$ $\frac{\partial p}{\partial y} = p'(y) \wedge \frac{\partial q}{\partial x} = q'(y)$	$z.B.\ x: Löse\ DG\ \frac{\partial}{\partial y}[p(x,y)a(x)] = \frac{\partial}{\partial x}[q(x,y)a(x)]\ nach\ a$ $mittels\ Separation\ der\ Variablen$
	$\frac{\partial p}{\partial y} = p'(x,y) \vee \frac{\partial q}{\partial x} = q'(x,y)$ $und\ p\ und\ q\ sind\ Polynome.$	$\frac{\partial}{\partial y}[p(x,y)x^{\alpha}y^{\beta}] = \frac{\partial}{\partial x}[q(x,y)x^{\alpha}y^{\beta}] \rightarrow$ $auflösen\ nach\ \alpha\ und\ \beta\ mit\ KV\ für\ alle\ x^ny^n$
Picard-Iteration	$y'(x) = f(x,y(x));\ y(x_0) = y_0$	$y_0(x) = y_0;\ y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y_n(s))\,ds,$ Voraussetzung: f(x,y(x)) ist eine Kontraktion

Dirichlet- und Neumann-Problem

$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ... (1); $AB:\ \mathrm{u}(x,0) = \mathrm{u}_0(x)$	$RB1:\ \mathrm{u}(0,t) = \mathrm{u}_l\ (Dirichlet)$ oder $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\ (Neumann)$ $RB2:\ \mathrm{u}(L,t) = \mathrm{u}_r\ (Dirichlet)$ oder $\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0\ (Neumann)$

Separation: $\mathrm{u}(x,t) = \widehat{\varphi}(x)\,\psi(t)$ ... (2) $\overset{(1)}{\Rightarrow} \widehat{\varphi}(x)\,\psi'(t) = \widehat{\varphi}''(x)\,\psi(t)\ |: \widehat{\varphi}(x)\,\psi(t) \Rightarrow \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\widehat{\varphi}''(x)}{\widehat{\varphi}(x)} = \lambda \Rightarrow$ $\psi'(t) = \lambda\,\psi(t)$ ... (3); $\widehat{\varphi}''(x) = \lambda\,\widehat{\varphi}(x)$ ... (4)

- RB1 und RB2 in (2) einsetzen ⇒ (5), (6)
- DGL von EWP (4) lösen und λ=μ² einsetzen. ⇒ z.B.: $\widehat{\varphi}(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$ ... (7)
- Mit (5) und (6) für (7) eine Konstante und μ_k=f(k) bestimmen ⇒ z.B.: $\widehat{\varphi}_k(x) = B\ \ \varphi_k(x)$ ... (8)
- Normieren: $B = \frac{1}{\|\varphi_k\|_2} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^L \varphi_k(x)\,dx}}$
- DGL von EWP (3) lösen und λ=μ² einsetzen. $\psi_k(t) = C_k\ \mathrm{f}(t,k)$ ... (9)
- $\mathrm{u}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{\varphi}_k(x)\,\psi_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\,\widehat{\varphi}_k(x)\,\mathrm{f}(t,k)$ ... (10)
- AB in (10) einsetzen: $\mathrm{u}_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\,\widehat{\varphi}_k(x)\,\mathrm{f}(0,k) \Leftrightarrow \mathrm{u}_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\langle \mathrm{u}_0(x), \widehat{\varphi}_k(x)\,\mathrm{f}(t,k)\rangle\ \widehat{\varphi}_k(x)\,\mathrm{f}(t,k) \Rightarrow$
  $C_k = \langle \mathrm{u}_0(x), \widehat{\varphi}_k(x)\,\mathrm{f}(t,k)\rangle = \int_0^L \mathrm{u}_0(x)\,\widehat{\varphi}_k(x)\,\mathrm{f}(0,k)\,dx$ ... (11)
- (11) in (10) einsetzen. Prüfen, ob C_k für bestimmte k=0 wird; prüfen ob die Reihe eine bekannte Fourier-Reihe ist; fertig.

Ermitteln der Partikulärlösung mittels Fundamentallösung:

1. Sei $\mathrm{L}(\mathrm{u}(x))$ ein gewöhnlicher, linearer Differentialoperator k-ter Ordnung: $\mathrm{L}(u) = x^{(k)} + a_{k-1}x^{(k-1)} + a_{k-2}x^{(k-2)} + \cdots + a_1 x' + a_0$
2. Gegeben ist $\mathrm{L}(\mathrm{u}(x)) = \mathrm{f}(x)$
3. Ermittle die homogene Lösung von $\mathrm{L}(\mathrm{u}(x)) = 0$ und setze damit <u>Fundamentallösung</u> $\mathrm{U}(x)$ in zwei Teilen für x<0 und x>0 zusammen.
4. Schreibe dabei getrennte Konstanten C_{i-} und C_{i+} an. Bestimme die Konstanten so, dass $\mathrm{U}^{(k-1)}(x)$ an der Stelle x=0 einen Sprung 1 besitzt, und alle niedrigeren Ableitungen von U an der Stelle x=0 stetig sind. Dann gilt: $\mathrm{L}(\mathrm{U}(x)) = \delta(x)$
5. Die Partikulärlösung $\mathrm{u}_p(x)$ lautet dann: $\mathrm{u}_p(x) = (U * f)(x)$

Fundamentallösung für Laplace-Operator in $\mathbb{R}^2$:	$\vec{\nabla}^2\,\mathrm{u}(\vec{r}) = \mathrm{f}(\vec{r}) \Rightarrow \mathrm{U}(\vec{r}) = \frac{\ln\|\vec{r}\|}{2\pi} \Rightarrow \mathrm{u}(\vec{r}) = (U * f)(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\ln\left(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right)\mathrm{f}(\xi,\eta)\,d(\xi,\eta)$
Fundamentallösung für Laplace-Operator in $\mathbb{R}^3$:	$\vec{\nabla}^2\,\mathrm{u}(\vec{r}) = \mathrm{f}(\vec{r}) \Rightarrow \mathrm{U}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\|\vec{r}\|} \Rightarrow \mathrm{u}(\vec{r}) = (U * f)(\vec{r})$

Variationsprobleme:

$\mathrm{I}[y] = \int_{x_1}^{x_2}\mathrm{f}(x,y,y')\,dx \to Extr.; RB: \begin{cases}\mathrm{y}(x_0) = y_0\\ \mathrm{y}(x_1) = y_1\end{cases} \Longrightarrow$	Euler-Lagr. Gleichung	$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\partial f}{\partial y} \Longrightarrow$ DGL lösen nach y unter Berücksichtigung der RB
$\mathrm{I}[y] = \int_{x_1}^{x_2}\mathrm{f}(x,y')\,dx \to Extr.; RB: \begin{cases}\mathrm{y}(x_0) = y_0\\ \mathrm{y}(x_1) = y_1\end{cases} \Longrightarrow$	Vereinf. E-LGR-Gl.	$\frac{\partial f}{\partial y'} = const. \Longrightarrow$ DGL lösen nach y unter Berücksichtigung der RB
$\mathrm{I}[y] = \int_{x_1}^{x_2}\mathrm{f}(y,y')\,dx \to Extr.; RB: \begin{cases}\mathrm{y}(x_0) = y_0\\ \mathrm{y}(x_1) = y_1\end{cases} \Longrightarrow$	1. Integral E-LGR-Gl.	$y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f = const. \Longrightarrow$ DGL lösen nach y (Separation der Variablen)
$\mathrm{I}[\vec{r}] = \int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}(t,\vec{r},\vec{r}')\,dx \to Extr.; RB: \begin{cases}\vec{\mathrm{r}}(t_0) = \vec{r}_0\\ \vec{\mathrm{r}}(t_1) = \vec{r}_1\end{cases} \Longrightarrow$	Lagrange Funktion	$\frac{d}{dt}\nabla_v\mathcal{L} = \nabla_r\mathcal{L} \Longrightarrow$ DGLSYS lösen nach $\vec{r}$ unter Berücksichtigung der RB
$\mathrm{I}[\vec{r}] = \int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}(\vec{r},\vec{r}')\,dx \to Extr.; RB: \begin{cases}\vec{\mathrm{r}}(t_0) = \vec{r}_0\\ \vec{\mathrm{r}}(t_1) = \vec{r}_1\end{cases} \Longrightarrow$	Hamilton-Funktion	$\vec{r}'\cdot\nabla_v\mathcal{L} - \mathcal{L} = const. \Longrightarrow$ DGLSYS lösen nach $\vec{r}$ unter Ber. der RB

$\mathrm{I}[y] = \int_{x_1}^{x_2}\mathrm{f}(x,y,y')\,dx \to Extr.; RB: \begin{cases}\mathrm{y}(x_0) = y_0\\ \mathrm{y}(x_1) = y_1\\ \varphi[y] = \int_{x_1}^{x_2}\mathrm{g}(x,y,y')\,dx - C = 0\end{cases} \Longrightarrow$	$h = f + \lambda g \Longrightarrow$	isoperi-metrische Euler-Lagr. Gleichung	$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial y'}\right) = \frac{\partial h}{\partial y}$
$\mathrm{I}[y] = \int_{x_1}^{x_2}\mathrm{f}(x,y')\,dx \to Extr.;\quad RB: \begin{cases}\mathrm{y}(x_0) = y_0\\ \mathrm{y}(x_1) = y_1\\ \varphi[y] = \int_{x_1}^{x_2}\mathrm{g}(x,y')\,dx - C = 0\end{cases} \Longrightarrow$	$h = f + \lambda g \Longrightarrow$	vereinf. isoperim. ELGR-Gl.	$\frac{\partial h}{\partial y'} = const.$
$\mathrm{I}[y] = \int_{x_1}^{x_2}\mathrm{f}(y,y')\,dx \to Extr.;\quad RB: \begin{cases}\mathrm{y}(x_0) = y_0\\ \mathrm{y}(x_1) = y_1\\ \varphi[y] = \int_{x_1}^{x_2}\mathrm{g}(y,y')\,dx - C = 0\end{cases} \Longrightarrow$	$h = f + \lambda g \Longrightarrow$	1. Integral isoperim. E-LGR-Gl.	$y'\frac{\partial h}{\partial y'} - h = const.$

Sonstiges:

Nabla Operator:	$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$	Gradient von $f(\vec{r})$:	$\operatorname{grad} f(\vec{r}) = \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix}$	Divergenz von $\vec{v}(\vec{r})$:	$\operatorname{div} \begin{pmatrix} v_x(\vec{r}) \\ v_y(\vec{r}) \\ v_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} v_x(\vec{r}) \\ v_y(\vec{r}) \\ v_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \frac{\partial\, v_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial\, v_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial\, v_z(\vec{r})}{\partial z}$
Rotation von $\vec{v}(\vec{r})$:	$\operatorname{rot} \begin{pmatrix} v_x(\vec{r}) \\ v_y(\vec{r}) \\ v_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} v_x(\vec{r}) \\ v_y(\vec{r}) \\ v_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial x} - \frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial y} \end{pmatrix}$	Laplace-Operator von $f(\vec{r})$	$\vec{\nabla}^2 f(\vec{r}) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f(\vec{r}))) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} f(\vec{r})\right) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ Rechenregel: $\vec{\nabla} \cdot (f \vec{\nabla} g) = (\vec{\nabla} f) \cdot (\vec{\nabla} g) + f \vec{\nabla}^2 g$		
Richtungsableitung Richtung $\vec{e}$ in Punkt $\vec{r}$:	$D_{\vec{e}} f(\vec{r}) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\vec{r} + \varepsilon \vec{e}) - f(\vec{r})}{\varepsilon} = \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot \vec{e}$	Krümmung von $\vec{r}(t)$:	$\mathcal{K}(t) = \frac{\lvert \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \rvert}{\lvert \vec{r}'(t) \rvert^3}$		
y=y(x): $\mathcal{K}$, Radius:	$\mathcal{K} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$; $\rho = \frac{1}{\mathcal{K}}$	**y=y(x):** KK-Mittelpkt. KK-Gleichung:	$x_m = x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2)$; $y_m = y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2)$; $(x - x_{mp})^2 + (y - y_{mp})^2 = \rho_p{}^2$		
$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$: Krümmung $\mathcal{K}$	$\mathcal{K}(t) = \left\lvert \frac{x'(t)\, y''(t) - x''(t)\, y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} \right\rvert$	Fehlerabschätzung $\lvert\Delta f\rvert$ von $f(x,y,z)$	$\lvert \Delta f \rvert = \left\lvert \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x \right\rvert + \left\lvert \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \right\rvert + \left\lvert \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \right\rvert$		
Ableitungsformel Parameterintegral:	Sei $I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)\, dy$, dann ist $I'(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy + b'(x)\, f(x, b(x)) - a'(x)\, f(x, a(x))$				
Winkel ψ zwischen Leitstrahl und Tangente bei Polarkoordinatendarstellung r=f(φ)	$\psi = \arctan \frac{r}{r'}$				
Wronsky	$y_1(x)$ *und* $y_2(x)$ *sind linear unabhängig, wenn* $\exists x \in [a,b]$: $\det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0$ („*Fundamentalsystem*“)				