Merkzettel „Differentialrechnung“ III

08.07.2022

Grundlagen:

1. MWS	$f(x)$ stetig auf [a,b] und diff. auf (a,b): $\exists \xi \in (a,b): f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$	Satz v. Rolle:	$f(a) = f(b): \exists \xi \in (a,b): f'(\xi) = 0$
	$f(\vec{x})$ stetig diff. auf $B \subseteq \mathbb{R}^n$, B offen: $\exists \vartheta \in [0,1]$: $f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{\nabla} f(\vec{x} + \vartheta(\vec{y} - \vec{x})) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \int_0^1 \vec{\nabla} f(\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}))\, dt \cdot (\vec{x} - \vec{y})$ $\vec{f}(\vec{x}): B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, stetig diff.bar auf B, B offen: $\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y}) = \int_0^1 D\,\vec{f}(\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}))\, dt \cdot (\vec{x} - \vec{y})$		
2. MWS	Sei $f(x)$ stetig auf [a,b] und diff.bar auf (a,b), dann: $\exists \xi \in (a,b): f'(\xi)\,(g(b) - g(a)) = g'(\xi)\,(f(b) - f(a))$		
Stetig diff. auf (a,b):	$[\exists\, f' auf\ (a,b)] \wedge [f'\ stetig\ auf\ (a,b)]$	Stetig diff. auf [a,b]:	[stetig diff. auf (a,b)] $\wedge$ [$\exists\ f'(a_+), f'(b_-)$]
stetig (partiell)differenzierbar $\Rightarrow \begin{cases} \exists \text{ alle Richtungsabl.} \\ \text{total diffbar} \\ \text{stetig} \end{cases}$; total differenzierbar $\Rightarrow \begin{cases} \text{stetig} \\ \text{part. diffbar} \end{cases}$			
Satz v. Schwarz:	Sei $f(\vec{x}): B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig (partiell) differenzierbar. Dann gilt: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$		

Grundableitungen

$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$	$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx} lg_a(x) = \frac{1}{x \ln a}$	$\frac{d}{dx} e^x = e^x$; $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$	$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$	$\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$		$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$	$\frac{d}{dx} \cot(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -(1 + \cot^2(x))$		$\frac{d}{dx} \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx} \text{arccot}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{d}{dx} \sinh(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$			$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	
$\frac{d}{dx} \tanh(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$			$\frac{d}{dx} \text{cotanh}(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)' = 1 - \text{cotanh}^2(x) = \frac{1}{\sinh^2(x)}$	
$\frac{d}{dx} \text{arsinh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\frac{d}{dx} \text{arcosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ (x > 1)$		$\frac{d}{dx} \text{artanh}(x) = \frac{1}{1-x^2}\ (\lvert x \rvert < 1)$	$\frac{d}{dx} \text{arcoth}(x) = \frac{1}{1-x^2}\ (\lvert x \rvert > 1)$

Sonstige Ableitungen (Distributionen, etc.)

$\frac{d}{dx} \lvert x \rvert = \frac{d}{dx} \sqrt{x^2} = \frac{x}{\lvert x \rvert} = \text{sgn}(x)$	$\frac{d}{dx} \text{sgn}(x) = 2\,\delta(x)$	$\frac{d}{dx} \Theta(x) = \delta(x)$	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\, f(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, f'(x)\, dx = -f'(0)$

Ableitungsmethoden

$(fg)' = f'g + fg'$	$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg\prime}{g^2}$	$[f(g(x))]' = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$
$(f^g)' = \left(g' \ln f + \frac{f'g}{f}\right) f^g;\ wegen\ Ansatz: y = f^g \to \ln y = g \ln f \to \frac{\ln y}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} y' = g' \ln f + \frac{1}{f} f' g$			
$\frac{d}{dx} \ln(y(x)) = \frac{1}{y(x)} \frac{d}{dx} y(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}$			

Ableitung von Funktionen in Parameterdarstellung in $\mathbb{R}^2$:

$$y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\dot{x}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \qquad y'' = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy'}{dt}\frac{1}{\dot{x}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

Kurvendiskussion:

$y = f(x)$:	NST: $f(x_n) = 0$; E: $f'(x_e) = 0 \wedge [f''(x_e) \neq 0 \vee erste\ an\ x_e\ nicht\ verschwindende\ Ableitung\ ist\ gerade]$ MIN: $f''(x_e) > 0 \vee [f''(x_e) = 0 \wedge erste\ an\ x_e\ nicht\ verschwindende\ Ableitung > 0\ (\text{"Sattelpunkt"})]$ MAX: $f''(x_e) < 0 \vee [f''(x_e) = 0 \wedge erste\ an\ x_e\ nicht\ verschwindende\ Ableitung < 0\ (\text{"Sattelpunkt"})]$ W: $f''(x_w) = 0 \wedge [f'''(x_w) \neq 0 \vee erste\ an\ x_w\ nicht\ verschwindende\ Ableitung\ ist\ ungerade.]$ Konvex auf Intervall I: $f''(x) \geq 0$; strikt konvex: $f''(x) > 0$; konkav: $f''(x) \leq 0$; strikt konkav: $f''(x) < 0$; $\forall x \in I$.
$z = f(x,y)$:	E: $Löse\ Gleichungssystem\ z_x(x,y) = 0;\ z_y(x,y) = 0 \to prüfe\ ob\ z_{xx}(x_e,y_e) z_{yy}(x_e,y_e) - z_{xy}(x_e,y_e) > 0$ MIN: $z_{xx}(x_e,y_e) > 0$; MAX: $z_{xx}(x_e,y_e) < 0$

Hesse-Matrix von f(x,y):	$H(f(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$	Hesse-Matrix v. f(x,y,z):	$H(f(x,y,z)) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$	Hesse-Matrix v. f($x_1,\ldots,x_n$)	$[H(f(\vec{x}))]_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$	$H(f(\vec{x})) = D\,\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \underline{\underline{J}}_{\vec{\nabla} f}$ (symetrisch)

$z = f(\vec{r})$	$Stationärer\ Punkt\ \vec{r}_s$: $\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \vec{0}$; $GLS\ lösen. \to \vec{r}_s$ $MIN\ (elliptisch)$: $H(f(\vec{r}_s))\ pos.def. \Leftrightarrow [\forall: \lambda > 0] \Leftrightarrow [\forall: \det(M_k) > 0] \Leftrightarrow [\vec{x}^T H \vec{x} > 0\ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}]$ $MAX\ (ellipt.)$: $H(f(\vec{r}_s))\ neg.def. \Leftrightarrow [\forall: \lambda < 0] \Leftrightarrow [\text{sgn}(\det(M_k)) = (-1)^k, k = 1 \ldots n] \Leftrightarrow [\vec{x}^T H \vec{x} < 0\ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}]$ $Sattelpkt. (hyperb.)$: $H(f(\vec{r}_s))\ indef.reg. \Leftrightarrow [\exists: \lambda < 0 \wedge \exists: \lambda > 0 \wedge \nexists: \lambda = 0] \Leftrightarrow [\det(H(f(\vec{r}_s))) < 0] \Leftrightarrow [\vec{x}^T H \vec{x} \in \mathbb{R}^{\pm}]$ $parabolisch$: $H(f(\vec{r}_s))\ singulär \Leftrightarrow [\exists: \lambda = 0] \Leftrightarrow [\det(H(f(\vec{r}_s))) = 0]$

Finden von Extremalstellen mit impliziten Nebenbedingungen mittels Lagrange-Multiplikatoren:

$Geg.: Funktion\ f(x,y,z)\,; implizite\ Nebenbedingungen\ \varphi_i(x,y,z) = 0; i = 1 \dots n; f, \varphi_i\ stetig\ differenzierbar$
$\vec{\nabla}(f(x,y,z) + \lambda_1\,\varphi_1(x,y,z) + \cdots + \lambda_n\,\varphi_n(x,y,z)) = 0 \to Löse\ GLS \to x_E, y_E, z_E$

Differentialgleichungen (Grad: Höchste Potenz von $y^{(n)}$; Ordnung bzw. Rang: Höchste Ableitung n von $y^{(n)}$)

Homogene DG erster Ordnung mit trennbaren Variablen	$y' = f(x,y)$	Umformen zu $\frac{1}{y}dy = f(x)\,dx \mid \int \Longrightarrow \ln y = \int f(x)$
	$f(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}$	$\int f(x)\,dx = \int \frac{y'(x)}{y(x)}dx \Longrightarrow \int f(x)\,dx = \ln(y(x)) + c$
Gleichgradige („homogene") DG erster Ordnung	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	Ansatz: $z = \frac{y}{x} \Longrightarrow y = xz \Longrightarrow y' = x'z + z'x = z + \frac{dz}{dx}x$
Homogene DG zweiter Ordnung, die sich auf homogene DG erster Ordnung zurückführen lässt	$y'' = f(x)$	Zweimaliges integrieren
	$y'' = f(x,y')$ $y'' = f(y)$ $y'' = f(y,y')$	Ansatz: $y' = p \Longrightarrow y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$
	$y'' = f(y')$	Ansatz: $y' = p \Longrightarrow y'' = \frac{dp}{dx}$
Inhomogene DG erster Ordnung mit konstantem Koeffizienten → Prama I, 5.1	$y' = ay + s(x)$	$y(x) = Ce^{ax} + \int_{u=0}^{x} e^{a(x-u)}\,s(u)\,du$
Inhomogene DG erster Ordnung mit variablem Koeffizienten → Prama I, 5.2	$y' = a(x)\,y + s(x)$	$y(x) = Ce^{\Lambda(x)} + \int_{u=0}^{x} e^{\Lambda(x)-\Lambda(u)}\,s(u)\,du$ $\Lambda(x) = \int_{\tau=0}^{x} a(\tau)\,d\tau\,;\ \Lambda(x) - \Lambda(u) = \int_{\tau=u}^{x} a(\tau)\,d\tau$
Inhomogene DG erster Ordnung mit variablem Koeffizienten -> „Variation der Konstanten"	$y' + a(x)y = s(x)$	Ermittle $y_h(x,C) \Longrightarrow$ Ansatz $y_p(x,c(x))$ Ableitungen in DG einsetzen $\Longrightarrow$ $c'(x)$ bestimmen $\mid \int \Longrightarrow c(x) \Longrightarrow y = y_h + y_p(x,c(x))$
Inhomogene DG zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten: -> „Variation der Konstanten"	$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = s(x)$	Ermittle $y_{h1}(x), y_{h2}(x) \Longrightarrow y_h = c_1\,y_{h1}(x) + c_2 y_{h2}(x)$ Ansatz: $y_p(x) = c_1(x)\,y_{h1}(x) + c_2(x)\,y_{h2}(x) \Longrightarrow$ GLS: $\boldsymbol{y_{h1}(x)\,c_1'(x) + y_{h2}(x)\,c_2'(x) = 0}$ $\boldsymbol{y_{h1}'(x)\,c_1'(x) + y_{h2}'(x)\,c_2'(x) = s(x)} \Longrightarrow$ $c_i'(x)$ bestimmen $\mid \int \Longrightarrow c_i(x) \Longrightarrow y = y_h + y_p(x,c_i(x))$
Lineare DG erster oder höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten: Homogene Lösung	$y'' + a_1y' + a_2y = 0$	Charakter. Gleichung („CG") $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \to \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$
	F1: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \wedge \lambda_1 \neq \lambda_2$	$y_h = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + \cdots$ 2. Ord.: $C_1\cosh x + C_2\sinh x$
	F2: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \wedge \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y_h = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x} + C_3x^2e^{\lambda x} + \cdots$
	F3: $\lambda_1 = \alpha + i\beta;\ \lambda_2 = \alpha - i\beta$	alternativ reeller Ansatz: $y_h = e^{\alpha x}(C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x) + \cdots$
Inhomogene lineare DG erster oder höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten und speziellen Störfunktionen Inhomogene Lösung:	$y'' + a_1y' + a_2y = s(x)$	Ansatz y_p (s.u.), ableiten, in DG einsetzen, Koeffizientenvergleich
	F1: $s(x) = Polynom\ Grad\ n$	$y_p = b_o + b_1x + b_2x^2 + - \cdots + b_nx^n$
	F2: $s(x) = ae^{\gamma x}$	- γ ist keine Wurzel der CG: $y_p = be^{\gamma x}$ - γ ist einfache Wurzel der CG: $y_p = bxe^{\gamma x}$ - γ ist doppelte Wurzel der CG: $y_p = bx^2e^{\gamma x}$
	F3: $s(x) = a\sin\omega x + b\cos\omega x$	- $\sin\omega x$ und $\cos\omega x$ nicht in y_h: $y_p = A\sin\omega x + B\cos\omega x$ - $\sin\omega x$ oder $\cos\omega x$ Teil von y_h: $y_p = Ax\sin\omega x + Bx\cos\omega x$
	F4: Kombination aus F1, F2 und F3 (additiv oder multiplikativ)	Additive oder multiplikative Kombination aus den entsprechenden Ansätzen für y_p
Spezialansatz für inhomogene lineare DG erster Ordnung mit variablem Koeffizienten und Störfunktion der Form xy^n	$y' + a(x)y = xy^n$	$z = y^{1-n} \Longrightarrow$berechne $y(z) \Longrightarrow y' = \frac{dy}{dz}z' \Longrightarrow$ $DG\ z' + a(x)z = x \Longrightarrow$lösen in z
Homogene DGL der Form $\sum_{k=0}^{l} a_kx^k\,y^{(k)}(x) = 0$	$x^2y'' + a_1xy' + a_2y = 0$	Ansatz $y_h = cx^\lambda$, abl., einsetzen $\Longrightarrow$ CG: $\lambda(\lambda-1) + a_1\lambda + a_2 = 0$ $y_h = C_1x^{\lambda_1} + C_2x^{\lambda_2} + \cdots$
Inhomogene DGL der Form $\sum_{k=0}^{l} a_kx^k\,y^{(k)}(x) = bx^l$	$x^2y'' + a_1xy' + a_2y = bx^2$	$y_p = bx^2\ln(x)$; allgemein: $y_p = bx^l\ln(x)$
Hermitesche DGL	$y'' - 2xy' + 2ny = 0\ (n \in \mathbb{N}_0)$	$y = H_n(x) = (-1)^ne^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$
Exakte, nicht separable DG erster Ordnung	$p(x,y) + q(x,y)y' = 0 \to$ $p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = 0$ $wobei\ \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$	Prüfe: $\frac{\partial p}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial q}{\partial x} \Longrightarrow$ wenn nein: finde int. Faktor $a(x,y) \Longrightarrow$ $\phi(x,y) = \int p(x,y)\,dx + C(y) = \int q(x,y)\,dy + D(x) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow$bestimme $C(y)$ und $D(x) \Longrightarrow$ löse $\phi(x,y)$nach y auf.
Ermittlung des integrierenden Faktors	$\frac{\partial p}{\partial y} = p'(x) \wedge \frac{\partial q}{\partial x} = q'(x)\,, oder$ $\frac{\partial p}{\partial y} = p'(y) \wedge \frac{\partial q}{\partial x} = q'(y)$	z.B. x: Löse DGL $\frac{\partial}{\partial y}\,[p(x,y)a(x)] = \frac{\partial}{\partial x}\,[q(x,y)a(x)]$ nach a mittels Separation der Variablen
	$\frac{\partial p}{\partial y} = p'(x,y) \vee \frac{\partial q}{\partial x} = q'(x,y)$ $und\ p\ und\ q\ sind\ Polynome.$	$\frac{\partial}{\partial y}\,[p(x,y)x^\alpha y^\beta] = \frac{\partial}{\partial x}\,[q(x,y)x^\alpha y^\beta] \Longrightarrow$ auflösen nach α und β mit KV für alle x^ny^n
Picard-Iteration	$y'(x) = f(x,y(x));\ y(x_0) = y_0$	$y_0(x) = y_0;\ y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y_n(s))\,ds,$ Voraussetzung: f(x,y(x)) ist eine Kontraktion

System homogener linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

$y_1'(x)=c_{11}\,y(x)+\cdots+c_{1n}\,y(x)$ $\vdots$ $y_n'(x)=c_{n1}\,y(x)+\cdots+c_{nn}\,y(x)$	$\vec{y}'(x)=\underline{\underline{A}}\,\vec{y}(x)$, mit $y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$; $\underline{\underline{A}}=\begin{pmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \cdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}$	Char. Gleichung: $\underline{\underline{\lambda}}=\underline{\underline{A}}$; bestimmte EW a_i und EV $\lvert a_i\rangle$ von $\underline{\underline{A}}$ Ansatz: $\vec{y}_h=e^{\underline{\underline{\lambda}}x}\vec{k}=e^{\underline{\underline{A}}x}\vec{k}=(\sum_{i=1}^{n}e^{a_i}\lvert a_i\rangle\langle a_i\rvert)\vec{k}$ Bestimme $\vec{k}$ aus Rand- und Anfangsbedingungen

Dirichlet- und Neumann-Problem

$\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ldots(1)$; AB: $u(x,0)=u_0(x)$

$RB1$: $u(0,t)=u_l$ $(Dirichlet)$ oder $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$ $(Neumann)$

$RB2$: $u(L,t)=u_r$ $(Dirichlet)$ oder $\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0$ $(Neumann)$

Separation: $u(x,t)=\varphi(x)\,\psi(t)\ldots(2)\overset{(1)}{\Rightarrow}\varphi(x)\,\psi'(t)=\varphi''(x)\,\psi(t)\;|:\varphi(x)\,\psi(t)\;\Rightarrow\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}=\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}=\lambda\Rightarrow$ $\psi'(t)=\lambda\,\psi(t)\ldots(3)$; $\varphi''(x)=\lambda\,\varphi(x)\ldots(4)$

- RB1 und RB2 in (2) einsetzen ⇒ (5), (6)
- DGL von EWP (4) lösen und λ=μ² einsetzen. ⇒ z.B.: $\varphi(x)=A\cos(\mu x)+B\sin(\mu x)\ldots(7)$
- Mit (5) und (6) für (7) eine Konstante und $\mu_k=f(k)$ bestimmen ⇒ z.B.: $\varphi_k(x)=B\;\;\varphi_k(x)\ldots(8)$
- Normieren: $B=\frac{1}{\lVert\varphi_k\rVert_2}=\frac{1}{\sqrt{\int_0^L\varphi_k(x)\,dx}}$
- DGL von EWP (3) lösen und λ=μ² einsetzen. $\psi_k(t)=C_k\,f(t,k)\ldots(9)$
- $u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(x)\,\psi_k(t)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\,\varphi_k(x)\,f(t,k)\ldots(10)$
- AB in (10) einsetzen: $u_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\,\varphi_k(x)\,f(0,k)\Leftrightarrow u_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\langle u_0(x),\varphi_k(x)\,f(t,k)\rangle\,\varphi_k(x)\,f(t,k)\Rightarrow$
  $C_k=\langle u_0(x),\varphi_k(x)\,f(t,k)\rangle=\int_0^L u_0(x)\,\varphi_k(x)\,f(0,k)\,dx\ldots(11)$
- (11) in (10) einsetzen. Prüfen, ob C_k für bestimmte k=0 wird; prüfen ob die Reihe eine bekannte Fourier-Reihe ist; fertig.

Ermitteln der Partikulärlösung mittels Fundamentallösung:

1. Sei $\mathcal{L}(u(x))$ ein gewöhnlicher, linearer Differentialoperator k-ter Ordnung: $\mathcal{L}(u)=x^{(k)}+a_{k-1}x^{(k-1)}+a_{k-2}x^{(k-2)}+\cdots+a_1x'+a_0$
2. Gegeben ist $\mathcal{L}(u(x))=f(x)$
3. Ermittle die homogene Lösung von $\mathcal{L}(u(x))=0$ und setze damit <u>Fundamentallösung</u> $U(x)$ in zwei Teilen für x<0 und x>0 zusammen.
4. Schreibe dabei getrennte Konstanten C_{i-} und C_{i+} an. Bestimme die Konstanten so, dass $U^{(k-1)}(x)$ an der Stelle x=0 einen Sprung 1 besitzt, und alle niedrigeren Ableitungen von U an der Stelle x=0 stetig sind. Dann gilt: $\mathcal{L}(U(x))=\delta(x)$
5. Die Partikulärlösung $u_p(x)$ lautet dann: $u_p(x)=(U*f)(x)$

Fundamentallösung für Laplace-Operator in $\mathbb{R}^2$:	$\vec{\nabla}^2u(\vec{r})=f(\vec{r})\Rightarrow U(\vec{r})=\frac{\ln\lVert\vec{r}\rVert}{2\pi}\Rightarrow u(\vec{r})=(U*f)(\vec{r})=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\ln\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)f(\xi,\eta)\,d(\xi,\eta)$
Fundamentallösung für Laplace-Operator in $\mathbb{R}^3$:	$\vec{\nabla}^2u(\vec{r})=f(\vec{r})\Rightarrow U(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi\lVert\vec{r}\rVert}\Rightarrow u(\vec{r})=(U*f)(\vec{r})$

Variationsprobleme:

$I[y]=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,y')\,dx\to Extr.;RB:\begin{cases}y(x_0)=y_0\\ y(x_1)=y_1\end{cases}\Rightarrow$	Euler-Lagr. Gleichung	$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=\frac{\partial f}{\partial y}\Rightarrow$ DGL lösen nach y unter Berücksichtigung der RB
$I[y]=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y')\,dx\to Extr.;RB:\begin{cases}y(x_0)=y_0\\ y(x_1)=y_1\end{cases}\Rightarrow$	Vereinf. E-LGR-Gl.	$\frac{\partial f}{\partial y'}=const.\Rightarrow$ DGL lösen nach y unter Berücksichtigung der RB
$I[y]=\int_{x_1}^{x_2}f(y,y')\,dx\to Extr.;RB:\begin{cases}y(x_0)=y_0\\ y(x_1)=y_1\end{cases}\Rightarrow$	1. Integral E-LGR-Gl.	$y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f=const.\Rightarrow$ DGL lösen nach y (Separation der Variablen)
$I[\vec{r}]=\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}(t,\vec{r},\vec{r}')\,dx\to Extr.;RB:\begin{cases}\vec{r}(t_0)=\vec{r}_0\\ \vec{r}(t_1)=\vec{r}_1\end{cases}\Rightarrow$	Lagrange Funktion	$\frac{d}{dt}\nabla_v\mathcal{L}=\nabla_r\mathcal{L}\Rightarrow$ DGLSYS lösen nach $\vec{r}$ unter Berücksichtigung der RB
$I[\vec{r}]=\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}(\vec{r},\vec{r}')\,dx\to Extr.;RB:\begin{cases}\vec{r}(t_0)=\vec{r}_0\\ \vec{r}(t_1)=\vec{r}_1\end{cases}\Rightarrow$	Hamilton-Funktion	$\vec{r}'\cdot\nabla_v\mathcal{L}-\mathcal{L}=const.\Rightarrow$ DGLSYS lösen nach $\vec{r}$ unter Ber. der RB

$I[y]=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,y')\,dx\to Extr.;RB:\begin{cases}y(x_0)=y_0\\ y(x_1)=y_1\\ \varphi[y]=\int_{x_1}^{x_2}g(x,y,y')\,dx-C=0\end{cases}\Rightarrow$	$h=f+\lambda g\Rightarrow$	isoperi-metrische Euler-Lagr. Gleichung	$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial y'}\right)=\frac{\partial h}{\partial y}$
$I[y]=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y')\,dx\to Extr.;\quad RB:\begin{cases}y(x_0)=y_0\\ y(x_1)=y_1\\ \varphi[y]=\int_{x_1}^{x_2}g(x,y')\,dx-C=0\end{cases}\Rightarrow$	$h=f+\lambda g\Rightarrow$	vereinf. isoperim. ELGR-Gl.	$\frac{\partial h}{\partial y'}=const.$
$I[y]=\int_{x_1}^{x_2}f(y,y')\,dx\to Extr.;\quad RB:\begin{cases}y(x_0)=y_0\\ y(x_1)=y_1\\ \varphi[y]=\int_{x_1}^{x_2}g(y,y')\,dx-C=0\end{cases}\Rightarrow$	$h=f+\lambda g\Rightarrow$	1. Integral isoperim. E-LGR-Gl.	$y'\frac{\partial h}{\partial y'}-h=const.$

Umwandlung von DGL in die Sturm-Liouville'sche Gestalt und die Liouville'sche Normalform

Sturm-Liouville'sche Gestalt:

(1) Gegeben DGL der Form $a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = f(x) \Rightarrow y'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}y' + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}y - \frac{f(x)}{a_2(x)} = 0$

(2) SL-Gestalt: $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\,\rho(x)\right)y = 0 \Rightarrow p(x)\,y'' + p'(x)\,y' + q(x)\,y + \lambda\,\rho(x)\,y = 0 \Rightarrow$
$y'' + \frac{p'(x)}{p(x)}y' + \frac{q(x)}{p(x)}y + \frac{\lambda\,\rho(x)}{p(x)}y = 0$

(3) KV: $\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \frac{p'(x)}{p(x)};\ \frac{a_0(x)}{a_2(x)} = \frac{q(x)}{p(x)};\ -\frac{f(x)}{a_2(x)} = \frac{\lambda\,\rho(x)}{p(x)}y \Rightarrow p(x) = e^{\int\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx};\ q(x) = p(x)\frac{a_0(x)}{a_2(x)};\ \rho(x) = -\frac{p(x)}{\lambda y}\frac{f(x)}{a_2(x)}$

Liouville'sche Normalform

(1) Gegeben DGL der Form $a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = f(x)$ (s.o.) mit $x \in [a,b]$
(2) „RB in y": $y(a) = y_a;\ y(b) = y_b;$
(3) Bestimme SL-Gestalt $\left(\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x) + \lambda\,\rho(x)\right)y = 0$ mit $p(x)$, $q(x)$ und $\rho(x)$ (s.o.)
(4) L-NF: $-\ddot{w}(t) + [\hat{q}(t) - \lambda]\,w(t) = 0$ mit $t = t(x)$; $t(x) \in [t(a), t(b)]$
(5) (a) $t(x) = \int_a^x \sqrt{\frac{\rho(x)}{p(x)}}\,dx;$
(b) $w(t(x)) = \sqrt[4]{p(x)\,\rho(x)}\,y \Rightarrow$ (c) $y(x) = \frac{w(t)}{\sqrt[4]{p(x)\,\rho(x)}}$
(d) $\hat{q}(t(x)) = \frac{1}{\rho(x)}\left[-q(x) - \sqrt[4]{p(x)\,\rho(x)}\,\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{p(x)\,\rho(x)}}\right)\right)\right]$
(6) Setze (5d) in (4) ein und löse DGL (4) nach $w(t;\lambda)$
(7) Übersetze „RB in y" (2) mit (5b) in „RB in w": $w(t(a)) = \sqrt[4]{p(a)\,\rho(a)}\,y_a;\ w(t(b)) = \sqrt[4]{p(b)\,\rho(b)}\,y_b$
(8) Setze „RB in w" (7) in Lösung (6) ein, und bestimme damit die Konstanten und die Eigenwerte λ_n, die die Gl. erfüllen
(9) Setze die Eigenwerte λ_n in die Lösung (6) ein, und bestimme damit die Eigenfunktionen $w(t;\lambda_n)$
(10) Setze die Eigenfunktionen $w(t;\lambda_n)$ (9) in (5c) ein und bestimme damit die Eigenfunktionen $y(x;\lambda_n)$

Lösung von DGL mit der Greenschen Funktion

Problem: Löse DGL $\mathcal{L}_x\,y(x) = f(x)$ | Def. Greensche Funktion $G(x,x')$: | $\mathcal{L}_x\,G(x,x') \stackrel{\text{def}}{=} \delta(x-x') \Rightarrow y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,x')\,f(x')\,dx'$

Beweis: $\mathcal{L}_x\,y(x) = \mathcal{L}_x\int_{-\infty}^{\infty} G(x,x')\,f(x')\,dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_x\,G(x,x')\,f(x')\,dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')\,f(x')\,dx' = f(x)$

Ges: Partikuläre Lösung der DGL $\mathcal{L}_x\,y(x) = f(x)$ mit dem Differentialoperator $\mathcal{L}_x = a_0(x) + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + \cdots + a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}$

Ansatz: $G(x,x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}(k)\,e^{ik(x-x')}\,dk\ \ |\cdot\mathcal{L}_x$
$\mathcal{L}_x\,G(x,x') = \frac{1}{2\pi}\mathcal{L}_x\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}(k)\,e^{ik(x-x')}\,dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}(k)\,\mathcal{L}_x e^{ik(x-x')}\,dk\ \ |\ \mathcal{L}_x\,G(x,x') \stackrel{\text{def}}{=} \delta(x-x')$
$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}(k)\,\mathcal{L}_x e^{ik(x-x')}\,dk\ |\ \mathcal{L}_x e^{ik(x-x')} = p(k)\,e^{ik(x-x')}$
$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}(k)\,p(k)\,e^{ik(x-x')}\,dk\ \Big|\ \delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\delta}(k)\,e^{ik(x-x')}\,dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot e^{ik(x-x')}\,dk$
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-x')}\,dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}(k)\,p(k)\,e^{ik(x-x')}\,dk$
$e^{ik(x-x')} = \hat{G}(k)\,p(k)\,e^{ik(x-x')} \Rightarrow 1 = \hat{G}(k)\,p(k) \Rightarrow \hat{G}(k) = \frac{1}{p(k)}$
$G(x,x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}(k)\,e^{ik(x-x')}\,dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-x')}}{p(k)}\,dk\ |\ Integral\ lösen\ z.B.\ mit\ Residuensatz.\ Nötigenfalls\ aufspalten:$
Oberer HK (x-x'>0): $G_{OHK}(x,x') = H(x-x')\cdot 2\pi i\cdot\sum Res_{Im>0}$; Unterer HK: (x-x'<0): $G_{UHK}(x,x') = H(x'-x)\cdot 2\pi i\cdot\sum Res_{Im<0}$
$G(x,x') = G_{OHK}(x,x') + G_{UHK}(x,x')$
$y_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty}G(x,x')\,f(x')\,dx'$ *bzw.* $y_p(x) = \int_a^b G(x,x')\,f(x')\,dx'$ *für* $x\epsilon[a,b]$

Ges: Homogene Lösung der DGL $\mathcal{L}_x\,y(x) = f(x)$ mit dem Differentialoperator $\mathcal{L}_x = a_0(x) + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + \cdots + a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}$

Ansatz: $G_0(x,x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}_0(k)\,e^{ik(x-x')}\,dk\ \ |\cdot\mathcal{L}_x$
$\mathcal{L}_x\,G_0(x,x') = \frac{1}{2\pi}\mathcal{L}_x\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}_0(k)\,e^{ik(x-x')}\,dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}_0(k)\,\mathcal{L}_x e^{ik(x-x')}\,dk\ \ |\ \mathcal{L}_x\,G_0(x,x') \stackrel{\text{def}}{=} 0$
$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}_0(k)\,\mathcal{L}_x e^{ik(x-x')}\,dk\ |\ \mathcal{L}_x e^{ik(x-x')} = p(k)\,e^{ik(x-x')}$
$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}_0(k)\,p(k)\,e^{ik(x-x')}\,dk \Rightarrow 0 = \hat{G}_0(k)\,p(k)\,e^{ik(x-x')} \Rightarrow 0 = p(k)\ |\ Finde\ Lösungen\ k_1 \ldots k_n$
$\hat{G}_0(k) = c_1\,\delta(k-k_1) + c_2\,\delta(k-k_2) + \cdots + c_n\,\delta(k-k_n)$
$G_0(x,x') = \frac{c_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(k-k_1)\,e^{ik(x-x')}\,dk + \cdots + \frac{c_n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(k-k_n)\,e^{ik(x-x')}\,dk\ \Big|\ \frac{c_i}{2\pi} = \alpha_i$
$G_0(x,x') = \alpha_1\int_{-\infty}^{\infty}\delta(k-k_1)\,e^{ik(x-x')}\,dk + \cdots + \alpha_n\int_{-\infty}^{\infty}\delta(k-k_n)\,e^{ik(x-x')}\,dk\ |\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(k-k_1)\,f(k)\,dk = f(k_1)$
$G_0(x,x') = \alpha_1 e^{ik_1(x-x')} + \cdots + \alpha_n e^{ik_n(x-x')}$
$y_H(x) = G_0(0,x) = \alpha_1 e^{-ik_1x} + \cdots + \alpha_n e^{-ik_nx}$

$y(x) = y_P(x) + y_H(x)$ | *Bestimme Konstanten mit RB*

Lösung einer Fuchs'schen DGL mit der Frobenius-Methode

Fuchs'sche DGL	$a_0(x)\,y + a_1(x)\,y' + \cdots + a_n(x)\,y^{(n)} = 0 \ldots (DGL1)\ \vert : a_n(x) \ \Rightarrow \frac{a_0(x)}{a_n(x)}y + \frac{a_1(x)}{a_n(x)}y' + \cdots + y^{(n)} = 0 \ldots (DGL2)$ Bedingungen: (1) $\forall i \in [0,n]: \exists\ \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^{n-i}\frac{a_i(x)}{a_n(x)}$ (2) $a_0(x) \ldots a_n(x)$ sind analytisch rund um einen Punkt x_0 (d.h.: ∃ Potenzreihe, die in Umgebung von x_0 konvergiert)

(1) Ansatz: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$ ableiten bis $y^{(n)}$ und in (DGL1) einsetzen
(2) DGL durch $a_n(x)$ dividieren
(3) $1/a_n(x)$ in die Summen hineinnehmen.
(4) Den Startwert $n = 0$ jeder Summe individuell auf $n = s_i$ verändern, so dass bei allen Summen dieselbe Potenz von x steht. Nicht vergessen, alle Vorkommen von n in jeder so veränderten Summe entsprechend anzupassen!
(5) Bei den Summen, deren Startwert kleiner ist als der größte Startwert (z.B. $n = -1$ mit größtem Startwert $n = 0$), die ersten Terme „herausholen", so dass danach alle Summen denselben Startwert (z.B. $n = 0$) und dieselbe Potenz von x haben (siehe (4)).
(6) Alles Summen in eine Summe zusammenfassen.
(7) Die „herausgeholten" Terme nullsetzen. Daraus alle k Werte $\sigma_{i=1\ldots k}$ bestimmen, für die diese Teilgleichung erfüllt ist.
(8) Die Terme der zusammengefasten Summe nullsetzen, und zu einer Rekursionsgleichung $a_{n+m} = \mathrm{f}(a_n, a_{n+1}, \ldots)$ umformen.
(9) Rekursionsgleichung als explizite Funktion $a_n = a_n(a_0, n; \sigma)$ ausdrücken.
(10) Jedes σ_i aus Punkt (7) in Funktion (9) einsetzen, und $a_{n,\sigma_i} = a_n(a_0, n; \sigma_i)$ bestimmen
(11) Jedes a_{n,σ_i} in Ansatz (1) eigesetzt liefert eine Teillösung $y_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,\sigma_i} x^{n+\sigma}$.
(12) Prüfen, ob manche oder alle Reihen der Teillösungen $y_i(x)$ durch explizite Funktionen ausgedrückt werden können.
(13) $y = \sum_{i=1}^{k} y_i(x)$

Sonstiges

Nabla karthesisch:	$\vec\nabla = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$	Nabla Zylinderkoord.:	$\vec\nabla = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$	Nabla Kugelkoord.	$\vec\nabla = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\\ \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\end{pmatrix}$
Laplace $\vec\nabla^2$	Karth.: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Zylinder: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Kugel: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$				

Gradient von $f(\vec r)$:	$\operatorname{grad} f(\vec r) = \vec\nabla f(\vec r) = \begin{pmatrix}\frac{\partial f(\vec r)}{\partial x}\\ \frac{\partial f(\vec r)}{\partial y}\\ \frac{\partial f(\vec r)}{\partial z}\end{pmatrix}$	Divergenz von $\vec v(\vec r)$:	$\operatorname{div}\begin{pmatrix}v_x(\vec r)\\ v_y(\vec r)\\ v_z(\vec r)\end{pmatrix} = \vec\nabla\cdot\begin{pmatrix}v_x(\vec r)\\ v_y(\vec r)\\ v_z(\vec r)\end{pmatrix} = \frac{\partial v_x(\vec r)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(\vec r)}{\partial y} + \frac{\partial v_z(\vec r)}{\partial z}$
Rotation von $\vec v(\vec r)$:	$\operatorname{rot}\begin{pmatrix}v_x(\vec r)\\ v_y(\vec r)\\ v_z(\vec r)\end{pmatrix} = \vec\nabla\times\begin{pmatrix}v_x(\vec r)\\ v_y(\vec r)\\ v_z(\vec r)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial v_z(\vec r)}{\partial y} - \frac{\partial v_y(\vec r)}{\partial z}\\ \frac{\partial v_x(\vec r)}{\partial z} - \frac{\partial v_z(\vec r)}{\partial x}\\ \frac{\partial v_y(\vec r)}{\partial x} - \frac{\partial v_x(\vec r)}{\partial y}\end{pmatrix}$	Laplace-Operator von $f(\vec r)$	$\vec\nabla^2 f(\vec r) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f(\vec r))) = \vec\nabla\cdot(\vec\nabla f(\vec r)) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ Rechenregel: $\vec\nabla\cdot(f\vec\nabla g) = (\vec\nabla f)\cdot(\vec\nabla g) + f\vec\nabla^2 g$

$\vec\nabla\times(\vec\nabla f) = 0$ | $\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec v) = 0$ | $\vec\nabla\cdot(\vec\nabla f) = \vec\nabla^2 f$ | $\vec\nabla\cdot(f\vec v) = (\vec\nabla f)\cdot\vec v + f(\vec\nabla\cdot\vec v)$ | $\vec\nabla\times(f\vec v) = (\vec\nabla f)\times\vec v + f(\vec\nabla\times\vec v)$ | $\vec\nabla\times\vec\nabla\times\vec v = \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec v) - \vec\nabla^2\vec v$

$\vec\nabla\cdot(f\vec\nabla g) = (\vec\nabla f)\cdot(\vec\nabla g) + \vec\nabla^2 g$ | $\vec\nabla(fg) = f(\vec\nabla g) + g(\vec\nabla f)$ | $\vec\nabla\cdot(f\vec v) = f(\vec\nabla\cdot\vec v) + \vec v(\vec\nabla f)$ | $\vec a\times(\vec b\times\vec c) = \vec b(\vec a\cdot\vec c) - \vec c(\vec a\cdot\vec b)$

$\vec\nabla\cdot(\vec A\times\vec B) = \vec B\cdot(\vec\nabla\times\vec A) - \vec A\cdot(\vec\nabla\times\vec B)$

Richtungsableitung Richtung $\vec e$ in Punkt $\vec r$:	$D_{\vec e}f(\vec r) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\vec r + \varepsilon\vec e) - f(\vec r)}{\varepsilon} = \vec\nabla f(\vec r)\cdot\vec e$	Krümmung von $\vec r(t)$:	$\mathcal{K}(t) = \frac{\lvert\vec r'(t)\times\vec r''(t)\rvert}{\lvert\vec r'(t)\rvert^3}$
y=y(x): $\mathcal{K}$, Radius:	$\mathcal{K} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$; $\rho = \frac{1}{\mathcal{K}}$	**y=y(x):** KK-Mittelpkt. KK-Gleichung:	$x_m = x - \frac{y'}{y''}(1+y'^2)$; $y_m = y + \frac{1}{y''}(1+y'^2)$; $(x - x_{mp})^2 + (y - y_{mp})^2 = \rho_p{}^2$
$\vec r(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$: Krümmung $\mathcal{K}$	$\mathcal{K}(t) = \frac{\lvert x'(t)\,y''(t) - x''(t)\,y'(t)\rvert}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$	Fehlerabschätzung $\lvert\Delta f\rvert$ von $f(x,y,z)$	$\lvert\Delta f\rvert = \left\lvert\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right\rvert + \left\lvert\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right\rvert + \left\lvert\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right\rvert$

Ableitungsformel Parameterintegral:	Sei $I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)\,dy$, dann ist $I'(x) = \int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy + b'(x)\,f(x,b(x)) - a'(x)\,f(x,a(x))$
Winkel ψ zwischen Leitstrahl und Tangente bei Polarkoordinatendarstellung r=f(φ)	$\psi = \arctan\frac{r}{r'}$
Wronsky:	$y_1(x)$ *und* $y_2(x)$ *sind linear unabhängig, wenn* $\exists x \in [a,b]$: $\det\begin{pmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{pmatrix} \neq 0$ („*Fundamentalsystem*")

Totales Differential, lineare Approximation, Fréchet-Ableitung

Totales Diff:	Für kleine $\lVert\vec h\rVert$ gilt: $f(\vec x + \vec h) \approx f(\vec x) + \vec\nabla f(\vec x)\cdot\vec h \xrightarrow{\vec h\to\vec 0} f(\vec x + d\vec x) = f(\vec x) + df \Longrightarrow \boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n = \vec\nabla f\cdot d\vec x}$		
Lin. Approx Skalarfeld:	$f(\vec x) \approx f(\vec x_0) + \vec\nabla f(\vec x_0)\cdot(\vec x - \vec x_0)$	Lin. Approx. Vektorfeld:	$\vec f(\vec x) \approx \vec f(\vec x_0) + D\,\vec f(\vec x_0)\,(\vec x - \vec x_0) = \vec f(\vec x_0) + \underline{\underline{J}}(\vec x - \vec x_0) \Longrightarrow \boxed{D\vec f = \underline{\underline{J}}}$
Fréchet-Ableitung	$D^T = \vec\nabla\otimes \Longrightarrow$ $D\vec f = \underline{\underline{J}}$	Jacobi-matrix:	$\underline{\underline{J}} = \frac{\partial\vec f}{\partial\vec x} = D\vec f = \left(\vec\nabla\otimes\vec f\right)^T = \begin{pmatrix}\vec\nabla f_1^T(\vec x)\\ \ldots\\ \vec\nabla f_m^T(\vec x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$
Satz von der lokalen Invertierbarkeit:	Sei $\vec f(\vec x): B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in einer Umgebung von $\vec x_0 \in B$ stetig diff.bar und die Jacobi-Matrix $\frac{\partial\vec f}{\partial\vec x}(\vec x_0)$ regulär. Dann ist $\vec f(\vec x)$ an der Stelle $\vec x_0$ lokal invertierbar. $\vec f^{-1}(\vec y): W \to U$ ist in W stetig diff.bar, und: $D(\vec f^{-1}(\vec y)) = \left(D\,\vec f(\vec y)\right)^{-1} = \underline{\underline{J}}_f{}^{-1}$		

Kettenregel, allgemein

Kettenregel allgemein:	Sei $\vec{w} = (\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$, dann ist $D\vec{w} = D(\vec{g} \circ \vec{f}) = D\vec{g} \cdot D\vec{f} = (D\vec{g})(\vec{f}(\vec{x}))\, D\vec{f}(\vec{x}) \Longrightarrow$	Komposition zweier stetig diff.-barer Funkt. ist wieder diff.bar.
Spezialfall 1:	Auswertung eines Skalarfeldes g entlang einer mit x parametrisierten Kurve $\vec{f}(x) \Longrightarrow \vec{w} = g(\vec{f}(x))$ $Dg(\vec{y}) = (\vec{\nabla} g)^T = \left(\frac{\partial g(\vec{y})}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial g(\vec{y})}{\partial y_n}\right)$; $D\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} \end{pmatrix}$; $D\vec{w} = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial y_n}\right)\Big\vert_{\vec{y}=\vec{f}(x)} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} \end{pmatrix} = \vec{\nabla} g(\vec{f}(x)) \cdot \vec{f}'(x)$	
Spezialfall 2:	Auswertung eines Skalarfeldes g an einem Vektorfeld $\vec{f}(\vec{x}) \Longrightarrow \vec{w} = g(\vec{f}(\vec{x}))$ $Dg(\vec{y}) = (\vec{\nabla} g)^T = \left(\frac{\partial g(\vec{y})}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial g(\vec{y})}{\partial y_n}\right)$; $D\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$; $D\vec{w} = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial y_n}\right)\Big\vert_{\vec{y}=\vec{f}(\vec{x})} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$	

Implizite Differentiation (Hauptsatz über implizite Funktionen):

Impl. Fkt. mit 2 Var. (Kurve in Ebene) $\boldsymbol{f}: B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$, Auflösbarkeit nach $\mathbf{y}(\boldsymbol{x})$ und implizite Ableitung $\mathbf{y}'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

Voraussetzungen: **(i)** $f(x_0, y_0) = 0, (x_0, y_0) \in B$; **(ii)** $\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}$ stetig in Umgebung von (x_0, y_0); **(iii)** $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$

$\Longrightarrow$ ∃ nichtleere, offene Intervalle I um x_0, J um y_0 und Funktion $\mathbf{y}(\boldsymbol{x}): I \to J$ mit **(1)** $y(x_0) = y_0$; **(2)** $f(x, y(x)) = 0$; $x \in I, y \in J$

$\Longrightarrow$ **(3)** $y(x)$ ist auf I stetig diff.bar, und („tot. Diff. ") $\frac{d}{dx} f(x, y) = f_x(x, y) + f_y(x, y)\, y' = 0 \Longrightarrow \boxed{y'(x, y) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}}$

Impl. Fkt. mit 3 Var. (Fläche im Raum) $\boldsymbol{f}: B \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \mathbf{0}$, Auflösbarkeit nach $\mathbf{z}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ und implizite Ableitung $\begin{pmatrix} \mathbf{z}_x(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \\ \mathbf{z}_y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \end{pmatrix}$

Voraussetzungen: **(i)** $f(x_0, y_0, z_0) = 0, (x_0, y_0, z_0) \in B$; **(ii)** f_x, f_y, f_z stetig in Umgebung von (x_0, y_0, z_0); **(iii)** $\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \neq 0$

$\Longrightarrow$ ∃ Umgebung U um $(\vec{x}_0, y_0)$, V um z_0 und eindeut. Funktion $\mathbf{z}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}): U \to V$ mit **(1)** $z(x_0, y_0) = z_0$; **(2)** $f(x, y, z(x, y)) = 0$; $(x, y) \in U$

$\Longrightarrow$ **(3)** $y(x)$ ist auf I stetig diff.bar, und („tot. Diff. ") $\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x, y, z) = f_x(x, y, z) + f_z(x, y, z)\, z_x = 0 \\ \frac{d}{dy} f(x, y, z) = f_y(x, y, z) + f_z(x, y, z)\, z_y = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \vec{\nabla}\, \mathbf{z}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\begin{pmatrix} \frac{f_x(x,y,z)}{f_z(x,y,z)} \\ \frac{f_y(x,y,z)}{f_z(x,y,z)} \end{pmatrix}$

Implizite Funktion mit n Variablen $\boldsymbol{f}: B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\mathbf{f}(\vec{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$, Auflösbarkeit nach $\mathbf{y}(\vec{\boldsymbol{x}})$ und impl. Abl. $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}_i}(\vec{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y})$

Voraussetzungen: **(i)** $f(\vec{x}_0, y_0) = 0, (\vec{x}_0, y_0) \in B$; **(ii)** $\forall \frac{\partial f}{\partial x_i}; \frac{\partial f}{\partial y}$ stetig in Umgebung von $(\vec{x}_0, y_0)$; **(iii)** $\frac{\partial f(\vec{x}_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$

$\Longrightarrow$ ∃ Umgebung U um $\vec{x}_0$, V um y_0 und eindeutige Funktion $\mathbf{y}(\vec{\boldsymbol{x}}): U \to V$ mit **(1)** $y(\vec{x}_0) = y_0$; **(2)** $f(\vec{x}, y(\vec{x})) = 0$; $\vec{x} \in U, y \in V$;

$\Longrightarrow$ **(3)** $y(\vec{x})$ ist auf U stetig diff.bar, und („tot. part. Diff. "): $\frac{d}{dx_i} f(\vec{x}, y) = f_{x_i}(\vec{x}, y) + f_y(\vec{x}, y)\, y_{x_i} = 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial y}{\partial x_i}(\vec{x}, y) = -\frac{f_{x_i}(\vec{x},y)}{f_y(\vec{x},y)}}$

Zwei impl. Fkt. mit 3 Var. (Kurve im Raum) $\vec{\boldsymbol{f}}: B \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$: $\vec{\mathbf{f}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ \mathbf{f}_2(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}}$, Auflösb. nach $\begin{pmatrix} \mathbf{x}(\boldsymbol{t}) \\ \mathbf{y}(\boldsymbol{t}) \end{pmatrix}$, impl. Abl. $\begin{pmatrix} \mathbf{x}'(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ \mathbf{y}'(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{pmatrix}$

Voraussetzungen: **(i)** $\vec{f}(t_0, x_0, y_0) = \vec{0}$; **(ii)** $\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}; \frac{\partial \vec{f}}{\partial x}; \frac{\partial \vec{f}}{\partial y}$ stetig in Umgebung von (t_0, x_0, y_0); **(iii)** $\frac{\partial \vec{f}(t_0, x_0, y_0)}{\partial (x,y)} = \underline{\underline{J}}_{(x,y)}$ regulär

$\Longrightarrow$ ∃ Umgebung U um t_0, Umgebung V um (x_0, y_0) und Funktionen $x(t), y(t)$ mit **(1)** $x(t_0) = x_0$; $y(t_0) = y_0$; **(2)** $\vec{f}(t, x(t), y(t)) = \vec{0}$

$\Longrightarrow$ **(3)** $x(t), y(t)$ s. diffb.: $\frac{d}{dt} \vec{f}(t, x, y) = \vec{f}_t(t, x, y) + \frac{\partial \vec{f}(t,x,y)}{\partial (x,y)} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \vec{0} \Longrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x'(t, x, y) \\ y'(t, x, y) \end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial \vec{f}(t,x,y)}{\partial (x,y)}\right)^{-1} \vec{f}_t(t, x, y)}$

Impl. Vektorfunkt. mit n Var $\vec{\boldsymbol{f}}: B \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$: $\vec{\mathbf{f}}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = \vec{\mathbf{f}}(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_m) = \vec{\mathbf{0}}$, Auflösb. nach $\vec{\mathbf{y}}(\vec{\boldsymbol{x}})$, impl. Ableitung $\mathbf{D}\vec{\mathbf{y}}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}})$

Voraussetzungen: **(i)** $\vec{f}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$; **(ii)** $\forall \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}; \frac{\partial \vec{f}}{\partial y_i}$ stetig in Umgebung von $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$; **(iii)** $\vec{f}_{\vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \frac{\partial \vec{f}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)}{\partial \vec{y}} = \underline{\underline{J}}_{\vec{y}}$ regulär

$\Longrightarrow$ ∃ Umgebung U um $\vec{x}_0$, V um $\vec{y}_0$ und eindeutige Funktion $\vec{\mathbf{y}}(\vec{\boldsymbol{x}}): U \to V$ mit **(1)** $y(\vec{x}_0) = y_0$; **(2)** $\vec{f}(\vec{x}, \vec{y}(\vec{x})) = \vec{0}$; $\vec{x} \in U, \vec{y} \in V$;

$\Longrightarrow$ **(3)** $\vec{y}(\vec{x})$ ist auf U stetig diff.bar, und: $\frac{d}{dx} \vec{f}(\vec{x}, \vec{y}) = \underline{\underline{f}}_{\vec{x}}(\vec{x}, \vec{y}) + \underline{\underline{f}}_{\vec{y}}(\vec{x}, \vec{y})\, D\vec{y} = \mathbb{0} \Longrightarrow \boxed{D\vec{y}(\vec{x}, \vec{y}) = -\underline{\underline{\vec{f}}}_{\vec{y}}^{-1}(\vec{x}, \vec{y})\, \underline{\underline{f}}_{\vec{x}}(\vec{x}, \vec{y})}$

Reguläre und singuläre Punkte

Sei $f(\vec{x}): B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar. Sei $M = \{\vec{x} \in B: f_{impl}(\vec{x}) = 0\}$. Ein Punkt $\vec{x}_0$ ist regulär, wenn $\vec{\nabla} f_{impl}(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$, sonst ist $\vec{x}_0$ singulär.

Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen

Sei $z = x + iy$, und $f(z) = u(x, y) + v(x, y)$	$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \cdot \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x - i\Delta y} = \frac{\Delta u \Delta x + i\Delta v \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \begin{aligned} &\xRightarrow{\Delta y=0, \Delta x \to 0} \frac{df}{dz} = \frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx} \\ &\xRightarrow{\Delta x=0, \Delta y \to 0} \frac{df}{dz} = \frac{dv}{dy} - i\frac{du}{dy} \end{aligned} \Longrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix}} \Longrightarrow \vec{\nabla} u \perp \vec{\nabla} v$;	$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0$

Sei $f(\underline{z}) = f(x + iy) = u(x, y) + i\, v(x, y)$. Dann ist $f(\underline{z})$ differenzierbar an der Stelle $\underline{z}_0 = x_0 + iy_0$, wenn gilt:
$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ und sowohl $u(x, y)$ als auch $v(x, y)$ sind in einer Umgebung von (x_0, y_0) stetig differenzierbar.