Merkzettel „Analysis-Diverses“ III

12.11.2024

Zahlen	Natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$; $\mathbb{N}_0=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$; ganze Zahlen $\mathbb{Z}=\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$; rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ = {„Menge der gekürzten Brüche“}, Reelle Zahlen $\mathbb{R} = \{\mathbb{Q}$ + irrationale Zahlen$\}$; komplexe Zahlen $\mathbb{C} = \{\mathbb{R}$ + imaginäre Zahlen$\}$		
Potenzen	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$
Auf ganzes Quadrat bringen:	$\alpha x^2 + \beta x = \left(\sqrt{\alpha}x\right)^2 + 2\frac{\beta}{2}x + \left(\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 = \left(\sqrt{\alpha}x + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha}$		
	$\alpha x^2 + \beta x^2 = \left(\sqrt{\alpha}x\right)^2 + \left(\sqrt{\beta}x\right)^2 + 2x^2\sqrt{\alpha\beta} - 2x^2\sqrt{\alpha\beta} = \left(\sqrt{\alpha}x + \sqrt{\beta}x\right)^2 - 2x^2\sqrt{\alpha\beta}$		
n ∈ $\mathbb{G}$	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$	$a^6 - b^6 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$
n ∈ $\mathbb{C}$	$a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$		
n ∈ $\mathbb{U}$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$	
	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$	
$z^2(a+b)^2 = (za+zb)^2$	$z(a+b)^2 = \frac{1}{z}(za+zb)^2$		
Periodische Zahlen in Bruch umwandeln:	$0,\dot{1}23\dot{4} = \frac{1234}{9999}$	$0{,}98\dot{1}2\dot{3} = \frac{98\,025}{99\,900}$; *weil*:	$\begin{array}{rr} 100\,000x = & 98123,\dot{1}2\dot{3} \\ 100x = & 98,\dot{1}2\dot{3} \\ \hline 99\,900x = & 98025{,}000 \end{array}$ }-
Ungleichungen:	Bei Multiplikation mit negativer Zahl: Umkehr des Vergleichsoperators. Bei Ungleichungen mit Brüchen gesonderte Betrachtung Nenner>0 und Nenner<0		
Rechnen mit Logarithmen	$\log(u \cdot v) = \log u + \log v$; $\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log u - \log v$; $\log(u^n) = n \log u$; $\log \sqrt[n]{u} = \frac{\log u}{n}$; $\lg_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$		
Rechnen mit Potenzen	$a^{n+m} = a^n a^m$; $a^{n-m} = a^n a^{-m} = \frac{a^n}{a^m}$; $(a^n)^m = a^{nm}$; $a^n b^n = (ab)^n$; $a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln(a)}$		
$a^x = b^x \to x = 0$	$a^x + a^{x+n} = b^x + b^{x+m} \to a^x(1+a^n) = b^x(1+b^n) \to Aa^x = Bb^x \to \ln A + \ln a^x = \ln B + \ln b^x \to$		

$$\frac{\ln A}{\ln a} + x = \frac{\ln B}{\ln a} + \frac{\ln b^x}{\ln a} \to \ln A + x\ln a = \ln B + \ln b^x \to \frac{\ln A}{\ln b} + \frac{x\ln a}{\ln b} = \frac{\ln B}{\ln b} + x \to \ln A + x\ln a = \ln B + x\ln b \to x = \cdots$$

Komplexe Zahlen

Karthesische Binomialform	**Polarform**
$z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$ $\mathrm{Re}(z) = \lvert z\rvert\cos(\varphi) = \frac{1}{2}(z + z^*)$ $\mathrm{Im}(z) = \lvert z\rvert\sin(\varphi) = \frac{1}{2i}(z - z^*)$	$z = \lvert z\rvert(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \lvert z\rvert e^{i\varphi}$ $\lvert z\rvert = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{zz^*}$
Konjungiert komplex	**Konjungiert komplex**
$\underline{z}^* = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$	$z^* = \lvert z\rvert e^{-i\varphi}$

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right); & \mathrm{Re}(z) > 0 \\ \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) - \pi; & \mathrm{Re}(z) < 0, \mathrm{Im}(z) < 0 \\ \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) + \pi; & \mathrm{Re}(z) < 0, \mathrm{Im}(z) \geq 0 \\ +\frac{\pi}{2}; & \mathrm{Re}(z) = 0, \mathrm{Im}(z) > 0 \\ -\frac{\pi}{2}; & \mathrm{Re}(z) = 0, \mathrm{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

Rechenregel: $\mathrm{Re}(ab) = \mathrm{Re}(a)\,\mathrm{Re}(b) - \mathrm{Im}(a)\,\mathrm{Im}(b)$

Quadratische Gleichung

Kleine Lösungsformel	p und q aus Nullstellen x_1 und x_2	Große Lösungsformel	Scheitelpunktform
$x^2 + px + q = 0$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$	$x_1 + x_2 = -p$ $x_1 x_2 = q$	$ax^2 + bx + c = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$y = a(x - x_s)^2 + y_s$

Beweis durch vollständige Induktion:

Beweise $\sum_{i=1}^{n} u_n = \mathrm{f}(n)$	II.: n⟶n+1	Beh.: $\sum_{i=1}^{n+1} u_n = \mathrm{f}(n+1)$
I.: A(1): Prüfe $\sum_{i=1}^{1} u_n = \mathrm{f}(1)$	Ann.: $\sum_{i=1}^{n} u_n = \mathrm{f}(n)$	Bew.: $\sum_{i=1}^{n}(a_n) + a_{n+1} = \mathrm{f}(n+1) \xrightarrow{ind.} \mathrm{f}(n) + a_{n+1} = \mathrm{f}(n+1)$

Ansatz Partialbruchzerlegung bei gebrochen rationalen Polynomfunktionen (Grad Zähler < Nenner):

pro einfacher reeller NST	pro mehrfacher reeller NST	pro komplexer NST a ± bi:
$\frac{A_n}{x - x_n}$	$\frac{A_n}{x - x_n} + \frac{B_n}{(x - x_n)^2} + \cdots$	$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q} \mathrel{\hat=} \frac{Ax + B}{(x - c)(x - c^*)} \mathrel{\hat=} \frac{Ax + B}{x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)}$

Elementare Funktionen im Komplexen

e^z	$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{Re}(z)+i\,\mathrm{Im}(z))^n}{n!} = e^{\mathrm{Re}(z)}(\cos(\mathrm{Im}(z)) + i\sin(\mathrm{Im}(z)))$	$\lvert e^z\rvert = e^{\mathrm{Re}(z)}$	$\arg(e^z) = \mathrm{Im}(z)$	$e^{z+2\pi k i} = e^z;\ k \in \mathbb{Z}$
Euler: $e^{\pm i\varphi} = \cos(\varphi) \pm i\sin(\varphi)$	Moivre: $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi), n \in \mathbb{N}$	$e^z = e^{z_0}e^{z-z_0} = e^{z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{n!}$		
$\ln(z)$	Hauptzweig:	$\ln(z) = \ln\lvert z\rvert + i\arg(z)$	k-ter Nebenzweig:	$\ln_k(z) = \ln\lvert z\rvert + i(\arg(z) + 2k\pi);\ \ k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$
z^c	Hauptzweig:	$z^c = e^{c\ln(z)} = e^{c\ln(z)}$	k-ter Nebenzweig:	$(z^c)_k = e^{c\ln_k(z)} = e^{c\ln_k(z)};\ \ k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$
$\sqrt[n]{z}$	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\lvert z\rvert e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{\lvert z\rvert}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right)\right] = \sqrt[n]{\lvert z\rvert}e^{i(\varphi/n+2\pi k/n)};\ \ k = 0\ldots n-1\ (k = 0 \text{ ist Hauptzweig})$			
$\cos(z)$	$\cos(z) = \cosh(iz) = \mathrm{Re}(e^{iz}) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos(\mathrm{Re}(z))\cosh(\mathrm{Im}(z)) - i\sin(\mathrm{Re}(z))\sinh(\mathrm{Im}(z))$	$(\cos(z))^* = \cos(z^*)$		
$\sin(z)$	$\sin(z) = -i\sinh(iz) = \mathrm{Im}(e^{iz}) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \sin(\mathrm{Re}(z))\cosh(\mathrm{Im}(z)) + i\cos(\mathrm{Re}(z))\sinh(\mathrm{Im}(z))$	$(\sin(z))^* = \sin(z^*)$		
$\tan(z)$	$\tan(z) = -i\tanh(iz) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}$	$\cot(z)$	$\cot(z) = i\coth(iz) = \frac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{iz}-e^{-iz}}$	
$\arcsin(z)$	$\arcsin(z) = -i\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$	$\arccos(z)$	$\arccos(z) = \frac{\pi}{2} + i\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$	
$\arctan(z)$	$\arctan(z) = \frac{i}{2}(\ln(1-iz) - \ln(1+iz))$	$\mathrm{arccot}(z)$	$\mathrm{arcot}(z) = \frac{i}{2}\left(\ln\left(1-\frac{i}{z}\right) - \ln\left(1+\frac{i}{z}\right)\right)$	
$\cosh(z)$	$\cosh(z) = \cos(iz) = \frac{e^z+e^{-z}}{2} = \cosh(\mathrm{Re}(z))\cos(\mathrm{Im}(z)) + i\sinh(\mathrm{Re}(z))\sin(\mathrm{Im}(z))$			
$\sinh(z)$	$\sinh(z) = -i\sin(iz) = \frac{e^z-e^{-z}}{2} = \sinh(\mathrm{Re}(z))\cos(\mathrm{Im}(z)) + i\cosh(\mathrm{Re}(z))\sin(\mathrm{Im}(z))$			
$\tanh(z)$	$\tanh(z) = -i\tan(iz) = \frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}} = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}$	$\coth(z)$	$\coth(z) = i\cot(iz) = \frac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}$	
$Ae^{ix} + Be^{-ix} = (A+B)\cos(x) + i(A-B)\sin(x)$	$Ae^x + Be^{-x} = (A+B)\cosh(x) + (A-B)\sinh(x)$			
$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$	$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2+b^2};\ \varphi = \arctan\frac{b}{a}$	$a = r\cos\varphi;\ b = r\sin\varphi$		

Analytische Geometrie

Gerade:	$y = kx + d$ $ax + by = c$	$\mathrm{P_1/k}$: $y - y_1 = k(x - x_1)$	$\mathrm{P_1/\,P}$: $y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)$	$\varphi = \arctan\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$
Kreis	$x^2 + y^2 = r^2$	$(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2 = r^2$	Spaltgleichung: $x_0x + y_0y = r^2$; oder allgemein: $(x_0-x_m)(x-x_m) + (y_0-y_m)(y-y_m) = r^2$	
Parabel	$y = ax^2$	$(y-y_s) = a(x-x_s)^2$	Spaltgleichung $\frac{y_0+y}{2} = ax_0x$	a>0: nach oben offen ay<0: nach unten offen
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-x_m)^2}{a^2} + \frac{(y-y_m)^2}{b^2} = 1$	Spaltgleichung $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$	
Hyperbel	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-x_m)^2}{a^2} - \frac{(y-y_m)^2}{b^2} = 1$	Spaltgleichung $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$	

Regel von de l‘Hôspital

Ausdruck $\frac{f(x)}{g(x)}$ = „$\frac{0}{0}$“ oder „$\frac{\infty}{\infty}$“	**$f(x)\,g(x)$ = „$0\cdot\infty$“**	**$f(x)^{g(x)}$ = „1^{∞}“; „0^0“ oder „∞^0“**	**$f(x) - g(x)$ = „$\infty - \infty$“**
$\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$	$\lim_{x\to c} f(x)\,g(x) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} =$ „$\frac{0}{0}$“	$\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to c} g(x)\ln(f(x))} =$ „$e^{\infty\cdot 0}$“ oder „$e^{0\cdot\infty}$“	$\lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\,g(x)}} =$ „$\frac{0}{0}$“

Spezielle Funktionen

Gamma-Funktion: Erweiterung d. Fakultät auf $\mathbb{C}$	$\Gamma(\underline{z}) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt\,;\ \mathrm{Re}(\underline{z}) > 0$	$z! = \Gamma(z+1)$	$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$	$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$	$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
Beta-Funktion: Eulersches Integral erster Art	$\mathrm{B}\left(\underline{x},\underline{y}\right) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt\,;\ \mathrm{Re}(\underline{x}) > 0; \mathrm{Re}\left(\underline{y}\right) > 0$			$\mathrm{B}\left(\underline{x},\underline{y}\right) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$	

Praktische Näherungen für x<<1

$e^x \approx 1 + x + \left(\frac{x^2}{2}\right)$	$\sin(x) \approx \tan(x) \approx x$	$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$	$\sqrt{x+1} \approx 1 + \frac{x}{2} - \left(\frac{x^2}{8}\right)$	$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$

Erweitertes Horner-Schema:

$$P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

P_5 / x_0	a_3	a_2	a_1	a_0	
	/	$+x_0a_3$	$+x_0\sum_2$	$+x_0\sum_1$	
x_0	a_3	$\sum_2$	$\sum_1$	$\sum_0$	$\cdot\, 0! = P(x_0)$
	/	$+x_0a_3$	$+x_0\sum_2$		
x_0	a_3	$\sum_2$	$\sum_1$	$\cdot\, 1! = P'(x_0)$	
	/	$+x_0a_3$			
x_0	a_3	$\sum_2$	$\cdot\, 2! = P''(x_0)$		
	/				

Sonstiges

Binomialkoeffizient:	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$	$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$	$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$	$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
Lagrange-Polynom:	$Geg.: \{(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)\};\ \varphi_i(x) = \prod_{j=1;j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)};\ \mathrm{p}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i\,\varphi_i(x)$				
Kontraposition: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	Negation: $\neg(\forall x \in M{:}\ \mathrm{A}(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in M{:}\ \neg\mathrm{A}(x))$	$\neg(\exists x \in M{:}\ \mathrm{A}(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in M{:}\ \neg\mathrm{A}(x))$			
Injektiv: $\forall a_1, a_2 \in A{:}\ a_1 \neq a_2{:}\ \mathrm{f}(a_1) \neq \mathrm{f}(a_2)$	Surjektiv: $\forall b \in B{:}\ \exists a \in A{:}\ b = \mathrm{f}(a)$	bijektiv = injektiv ∧ surjektiv			
Dreiecksungleichungen: $\lvert x \pm y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert;\ \lvert x \pm y\rvert \geq \big\lvert \lvert x\rvert - \lvert y\rvert \big\rvert$	Komposition: $g \circ f = \mathrm{g}(\mathrm{f}(a))$				
Cauchy-Schwarz-Ungleichung: in $\mathbb{R}$: $xy \leq \lvert x\rvert\lvert y\rvert$, $im\ Vektoraum{:}\ \lvert\langle x,y\rangle\rvert \leq \lVert x\rVert\lVert y\rVert$					
Hilfreiche Abschätz-ungen:	$sei\ a,b,c > 0{:}\ a - b + c \leq a + c$	$sei\ m > n > 0{:}\ \frac{a}{n} + \frac{a}{m} \leq \frac{2a}{n}$	$sei\ 0 < a < 1, m > n > 0{:}\ a^n + a^m \leq 2a^n$		
	$sei\ m > n > 0{:}\ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n}$	$\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert\lvert b\rvert$	$\max(ab) = \max(a)\max(b)$	$\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(x)\,dx \leq \max_{a\leq x\leq b}(\mathrm{g}(x)) \int_a^b \mathrm{g}(x)\,dx$	
	$\left\lvert \int_a^b \mathrm{f}(x)\,dx \right\rvert \leq \int_a^b \lvert\mathrm{f}(x)\rvert\,dx \leq \max_{a\leq x\leq b}\lvert\mathrm{f}(x)\rvert\,(b-a) = \lVert\mathrm{f}(x)\rVert_\infty (b-a)$				
Gerade Funktion: $f(x) = f(-x)$	Ungerade Funktion: $f(x) = -f(-x)$	$\mathrm{f}_G(x) = \frac{\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(-x)}{2};\ \mathrm{f}_U(x) = \frac{\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(-x)}{2}$			
Konvex: $\mathrm{f}\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\big) \leq (1-\lambda)\,\mathrm{f}(x_1) + \lambda\,\mathrm{f}(x_2);\ \lambda \in (0,1)$	Konkav: $\mathrm{f}\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\big) \geq (1-\lambda)\,\mathrm{f}(x_1) + \lambda\,\mathrm{f}(x_2);\ \lambda \in (0,1)$				
Stetig an c: $\lim_{x\to c} \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(c) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0{:}\ \exists\,\delta(\varepsilon) > 0{:}\ \forall x{:}\ \lvert c - x\rvert < \delta{:}\ \lvert\mathrm{f}(c) - \mathrm{f}(x)\rvert < \varepsilon$	Hebbar unstetig: $\lim_{x\to c_-} f(x) = \lim_{x\to c_+} f(x)$				
Gleichmäßig stetig: $\forall\varepsilon > 0{:}\ \exists\,\delta(\varepsilon) > 0{:}\ \forall x_1,x_2{:}\ \lvert x_1 - x_2\rvert < \delta{:}\ \lvert\mathrm{f}(x_1) - \mathrm{f}(x_2)\rvert < \varepsilon$					
Lipschitz-stetig: $\forall x_1, x_2 \in I{:}\ \lvert\mathrm{f}(x_1) - \mathrm{f}(x_2)\rvert \leq L\lvert x_1 - x_2\rvert$	Lipschitz-stetig ⟹ gleichmäßig stetig: $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/L$				
Eine auf einem kompakten Intervall stetige Funktion ist dort beschränkt.					
Analytische Funktion: Sei $\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ oder $\mathbb{K}$=$\mathbb{C}$. Eine Funktion $f{:}\ D \subseteq \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ heißt ***analytisch*** im Punkt $x_0 \in D$, wenn es eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ gibt, die auf einer Umgebung von x_0 gegen $\mathrm{f}(x)$ konvergiert. Eigenschaften: (1) analytisch ⟹ glatt (2) lokale Potenzreihe = Taylorreihe; d.h.: $a_n = \frac{\mathrm{f}^{(n)}(x_0)}{n!}$ (3) Nur wenn $\mathbb{K}$=$\mathbb{C}$, dann gilt: analytisch ⟺ holomorph (4) Verkettungen analytischer Funktionen sind wieder analytisch.					
Holomorphe Funktion: Eine Funktion $f{:}\ D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt ***holomorph***, wenn sie in jedem Punkt von D komplex differenzierbar ist.					
Glatte Funktion: Eine Funktion $f{:}\ D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt ***glatt***, wenn sie unendlich oft (stetig) differenzierbar ist.					

Funktionenräume

Norm. Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$:	Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit definierter Norm: $V \to \mathbb{R}_0^+ : \vec{x} \to \|\vec{x}\|$: $(\|s\vec{x}\| = \|s\|\|\vec{x}\|) \wedge (\|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|) \wedge (\|\vec{x}\| \ge 0;\ \|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0})$
$\max_{a\le x\le b}(\|f(x)\| + \|g(x)\|) \le \max_{a\le x\le b}(\|f(x)\|) + \max_{a\le x\le b}(\|g(x)\|)$	
Funktional f	Sei V ein Vektorraum über den Körper $\mathbb{K}$. V kann auch ein Funktionenraum sein. Ein Funktional $f: V \to \mathbb{K}$ nimmt einen Vektor aus V als Input, und liefert einen Skalar $\in \mathbb{K}$ als Output
Lineares Funktional (LF)	f ist ein *Lineares Funktional* (LF) auf V, wenn: $f: V \to \mathbb{K}$: $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)\ \forall x, y \in V;\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
Beschränktes LF	Ein LF auf dem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt *beschränkt,* wenn $\exists K > 0$: $\|f(x)\| \le K\|x\|\ \forall x \in V$
Norm des LF	Das kleinstmögliche K (s.o.) heißt *Norm* des Linearen Funktionals f: $\|f\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1}\|f(x)\|$ 1-Norm: $\|f\|_1 = \int_a^b \|f(x)\|\, dx$ — 2-Norm: $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle_2} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx}$ — Maximum Norm: $\|f\|_\infty = \max_{a\le x\le b}\|f(x)\|$
Stetigkeit des LF	f: $stetig \Leftrightarrow beschränkt;\ \ stetig \Rightarrow lipschitz - stetig$
Operator F	Sei V ein Funktionenraum. Ein Operator $F: V \to U$ ist eine Abbildung zwischen den Funktionenräumen V und U
Linearer Operator (LO)	Seien$(V, \|\cdot\|_V)$ und $(U, \|\cdot\|_U)$ normierte (Funktionen)räume über $\mathbb{K}$. F ist ein *Linear Operator* (LO) auf V, wenn: $F: V \to U$: $F(\lambda x + \mu y) = \lambda F + \mu F(y)\ \forall x, y \in V;\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
Beschränkter LO	Ein LO $F: V \to U$ heißt *beschränkt,* wenn $\exists K > 0$: $\|F(x)\|_U \le K\|x\|_V\ \forall x \in V$. $LO: stetig \Leftrightarrow beschränkt$
Norm des LO	Das kleinstmögliche K (s.o.) heißt *Norm* des Lin. Operators F: $\|F\|_{V\leftarrow U} = \sup_{\|x\|_V\neq 0}\frac{\|F(x)\|_U}{\|x\|_V} = \sup_{\|x\|_V=1}\|F(x)\|_U$
Stetigkeit des LO	F: $stetig \Leftrightarrow beschränkt;$
Banachraum	Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ ist *vollständig*, wenn jede in V verlaufende Cauchyfolge konvergent ist; d.h. wenn ihr Grenzwert auch in V liegt. (Anm.: Für jede Teilmenge eines vollständigen normierten Raumes ist ihr Abschluss ein vollständiger Teilraum.) Ein vollständiger normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt *Banachraum*. Beispiele für endlichdimensionale Banachräume: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, Raum aller Polynome vom Maximalgrad n,... Beispiel für ∞-dimensionalen Banchraum: Raum d. stetigen Funktionen auf kompaktem Intervall $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$
Raum $L^1(a,b)$	Der <u>vervollständigte</u> Funktionenraum $\{f: C[0,\infty) \to \mathbb{R};\ \|f\|_1 < \infty\}$ mit $\|f\|_1 = \int_0^\infty \|f(x)\|\, dx$ wird als *Raum der absolut integrierbaren Funktionen* $L^1[0,\infty)$ bezeichnet. Für $\forall f \in L^1[0,\infty)$ gibt es eine Funktionenfolge $(f_n) \in C[0,\infty)$, so dass $\lim_{n\to\infty} f_n = f^*$. Daher ist $\|f^*\|_1 = \lim_{n\to\infty}\|f_n\|_1$. Statt $L^1[0,\infty)$ geht auch $L^1[a,b]$. • $f_n \in L^1 \Leftrightarrow \forall n: \|f_n\|_1 < \infty$ • f_n konvergiert in $L^1 \Leftrightarrow$ f_n ist eine Cauchyfolge in $L^1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0: \exists N(\varepsilon): \forall m, n \ge N(\varepsilon): \|f_m - f_n\|_1 < \varepsilon$
Banach'scher Fixpunktsatz	Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und **(1)** F selbstabbildend, d.h. $F: V \to V$ und **(2)** eine kontrahierende Abbildung, d.h.: $\exists L \in (0,1)$: $\|F(f) - F(\tilde{f})\| \le L\|f - \tilde{f}\|\ \forall f, \tilde{f} \in V$. Dann hat F *genau einen Fixpunkt* $f^* \in V: f^* = F(f^*)$. Wenn F eine lineare Abbildung ist, dann: $\|F\|_{V\leftarrow V} \le K < 1$.
Prähilbertraum	Ein Vektorraum, in dem ein inneres Produkt definiert ist $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, heißt *Prähilbertraum*. Damit es ein inneres Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ geben kann, muss die Norm $\|\cdot\|_2$ definiert sein, bzw. das Innere Produkt *induziert* die Norm $\|\cdot\|_2$: $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}\ \ \forall x \in V$. Für $\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ spricht man auch von einem *euklidischen Raum*, für $\mathbb{K}$=$\mathbb{C}$ von einem *unitären Raum*. In einem Prähilbertraum ist *„Orthogonalität"* x⊥y definiert ($x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$), und es existieren *Orthonormalbasen*.
Inneres Produkt	Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Das innere Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle: V \times V \to \mathbb{K}$ muss folgende Eigenschaften haben: - Linearität im ersten Argument: $\langle\lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle\ \forall x, y, z \in V;\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ (für $\langle x, y\rangle = \sum \bar{x}_i y_i$) - Hermite-Eigenschaft: $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}\ \ \forall x, y \in V$ - Definitheit: $\langle x, x\rangle \ge 0\ \forall x \in V\ \wedge\ \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Aus Linearität im ersten Argument und Hermite-Eigenschaft folgt konjugierte Linearität im zweiten Argument: $\langle z, \lambda x + \mu y\rangle = \bar{\lambda}\langle z, x\rangle + \bar{\mu}\langle z, y\rangle\ \forall x, y, z \in V;\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
Pythagoras	$x \perp y \Longrightarrow \|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$ — Cauchy-Schwarz: $\|\langle x, y\rangle\| \le \|x\|\|y\|$
Parallelogrammgleichg.	$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ für $\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$. $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2)$
Hilbertraum	Ein vollständiger Prähilbertraum $(\bar{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt Hilbertraum H. Für alle $x, y \in H$ gibt es Folgen $(x_n), (y_n)$, die gegen x bzw. y konvergieren. $\Rightarrow \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle \boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y_n}\rangle$.
Raum $L^2(a,b)$	Der Raum $V = C[a,b]$ über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle_2 = \int_a^b \mathbf{f(x)\, g(x)\, dx}$ und $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle_2} = \sqrt{\int_a^b f(x)\,\overline{f(x)}\, dx}$ wird durch Vervollständigung zum Hilbertraum $H = (L^2(a,b), \|\cdot\|_2)$, dem *Raum der quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen*. $L^2(a,b)$ besteht aus Funktionenklassen $L^2(a,b) = \{f_{class}(f^*): \|f^*\|_2 < \infty\}$. Jede Funktionenklasse $f_{class}(f^*)$ besteht aus allen äquivalenten Funktionen, für die gilt: $\|f - f^*\| = 0$ (das sind insb. Funktionen, die sich nur an endlich vielen Stellen punktweise unterscheiden). • $f_n \in L^2 \Leftrightarrow \forall n: \|f_n\|_2 < \infty$ • f_n konvergiert in $L^2 \Leftrightarrow$ f_n ist eine Cauchy-Folge in $L^2 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0: \exists N(\varepsilon): \forall m, n \ge N(\varepsilon): \|f_m - f_n\|_2 < \varepsilon$
Raum l^2	Der Raum l^2 ist der Raum der in der 2-Norm beschränkten Folgen: $l^2 = \{u = \{u_1, u_2, u_3, \ldots\}: \|u\|_2 < \infty\}$ mit $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \sum_{k=1}^\infty \boldsymbol{u_k v_k}$ und $\|u\|_2 = \sqrt{\langle u, u\rangle_2} = \sqrt{\sum_{k=1}^\infty u_k^2}$ • $u \in l^2 \Leftrightarrow \|u\|_2 < \infty \Leftrightarrow \|u\|_2^2 < \infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^\infty u_k^2 < \infty$
Satz von Riesz-Fischer	Sei H ein Hilbertraum, $f \in H$, $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ein ONS in H, und α_k ein Folge in $\mathbb{R}$. Dann: $\sum_{k=1}^\infty \|\alpha_k\|^2 < \infty \Leftrightarrow \exists f \epsilon H: f = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k\varphi_k$
separabler $H \Leftrightarrow l^2$	Ist H separabel, (d.h. $\exists$ ONB $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$: $\forall f \in H: f = \sum_{k=1}^\infty \langle f, \varphi_k\rangle\varphi_k$) $\Longrightarrow \|f\|_H^2 = \sum_{k=1}^\infty \|\alpha_k\|^2 = \|\alpha\|_{l^2}^2$ (z.B. H=L^2)

Orthogonalräume, Orthogonalprojektion

Orthogonale Vektoren	Sei V ein Prähilbertraum, und $x, y \in V$. Dann gilt: $\langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp y$
Orthogonale Unterräume	Sei V ein Prähilbertraum und $M, N \subseteq V$. Dann ist $M \perp N$, wenn $\forall x \in M, \forall y \in N: x \perp y$
Orthogonalraum	Sei V ein Prähilbertraum und $M \subseteq V$. Der Orthogonalraum $M^{\perp} = \{\forall x \in V: x \perp M\}$
Orthogonaler Projektionssatz	Sei U ein abgeschlossener Unterraum von H. Dann gibt es für jedes $x \in H$ genau ein $u \in U$, so dass $\lVert u - x\rVert = \min_{v \in U}\lVert v - x\rVert$. Dann gilt: $(u - x) \in U^{\perp}$ und $H = U \oplus U^{\perp}$.
Orthogonalprojektoren	Sei U ein abgeschlossener Unterraum von H. Dann sind die Orthogonalprojektoren P und Q Abbildungen $x \in H \mapsto Px \in U$ und $x \in H \mapsto Px \in U^{\perp}$, die x eindeutig zerlegen in $x = Px + Qx$ mit $Px \perp Qx$. Für Orthogonalprojektoren gilt immer: $PPx = Px$ und $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$.
Orthogonalprojektion auf endlichdimensionalen Unterraum	Sei U ein m-dimensionaler Unterraum von H und $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ eine ONB von U. Dann ist für jedes $x \in H$ die Bestapproximierende $Px \in U$ gegeben mit $Px = \sum_{k=1}^{m}\langle x, \varphi_k\rangle\varphi_k$
Separabler Hilbertraum	H ist separabel, wenn in H eine abzählbare ONB $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ existiert, d.h. $\forall x \in H: x = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, \varphi_k\rangle\varphi_k$. $L^2(a, b)$ ist separabel.
Trigonometrisches Fundamentalsystem (TRFS)	$\{1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \sin(3x), \cos(3x), \dots\}$ ist ein OGS in $L^2(-\pi, \pi)$
Trigonometrische ONB	$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(3x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(3x)}{\sqrt{\pi}}, \dots\right\}$ ist eine ONB in $L^2(-\pi, \pi)$ (→ Fourier!)
Besselsche Ungleichung	Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ ein ∞-dimensionales ONS in H. Dann gilt: $\sum_{k=1}^{\infty}\lvert\langle x, \varphi_k\rangle\rvert^2 \leq \lVert x\rVert^2$ („Projektion ist kürzer")
Parseval'sche Gleichung	Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ ein ∞-dimensionales ONB in H. Dann gilt: $\sum_{k=1}^{\infty}\lvert\langle x, \varphi_k\rangle\rvert^2 = \lVert x\rVert^2$ Im TRFS: $\frac{1}{\pi}\lVert f\rVert_2^2 = \frac{1}{\pi}\int_a^b \mathrm{f}^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$ … mit a_k F.-Koeff. für $\cos(nx)$ und b_k für $\sin(nx)$

Distributionen

Definition	Es gibt „irreguläre" Funktionen $\mathrm{F}(x)$, die wegen besonderer Eigenschaften im herkömmlichen Sinn nicht definiert werden können, oder die zwar definiert werden können, aber im Intervall von -∞ bis +∞ nicht integrierbar sind. Diesen Funktionen kann aber ein Funktional $\mathrm{F}[\varphi]$, genannt „Distribution", zugeordnet werden, dass das Verhalten auf eine Testfunktion $\varphi(x)$ beschreibt: $\mathrm{F}(x) \leftrightarrow \mathrm{F}[\varphi] \equiv \langle F, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{F}(x)\,\varphi(x)\,dx$. In diesem Sinne kann $\mathrm{F}(x)$ als eine Gewichtung im Integral der Testfunktion verstanden werden. Die Menge aller Distributionen $\mathrm{F}[\varphi]$ kann auch als der Dualraum aller Testfunktionen verstanden werden.
Eigenschaften	Linearität: $\mathrm{F}[\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2] = \alpha\,\mathrm{F}[\varphi_1] + \beta\,\mathrm{F}[\varphi_2]$ · Ableitung: $\langle F', \varphi\rangle = -\langle F, \varphi'\rangle$; $\langle F^{(n)}, \varphi\rangle = (-1)^n\langle F, \varphi^{(n)}\rangle$
Testfunktion	Notwendige Eigenschaften von „guten" Testfunktionen $\varphi(x)$ sind abhängig von $\mathrm{F}[\varphi]$. Im Allgemeinen soll ein $\varphi(x)$ mindestens (1) glatt sein; und (2) „hinreichend schnell" im Unendlichen auf Null gehen. • Testfunktion Klasse 1: Der „Träger ist kompakt" (i.e.: $\varphi(x)$ ist nur in begrenztem Bereich ungleich Null) • Testfunktion Klasse 2: $\varphi_{c,d}(x) = e^{-\left(\frac{1}{x-c}\right)+\frac{1}{d-x}}\ für\ c < x < d; sonst\ 0$ • Testfunktion Klasse 3: „gut" im Sinne der Fourieranalyse von allgemeinen temperierten Distributionen: $\varphi(x)$ verschwindet „hinreichend schnell" im Unendlichen, ist aber ungleich null bei allen anderen Werten, z.B. $\varphi(x) = e^{-\pi x^2}$ • Testfunktion Klasse 4: Wenn $\mathrm{F}(x)$ „hinreichend konzentriert" ist, dann entfällt die Bedingung, dass die Testfunktion im Unendlichen gegen Null gehen soll, und es bleibt nur die Bedingung dass sie glatt (i.e. unendlich oft differenzierbar) ist.
Delta-Funktion	$\delta(x) \leftrightarrow \delta[\varphi] = \delta_0[\varphi] = \varphi(0) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$ · $\delta(x - x_0)\,\delta_{x_0}[\varphi] = \varphi(x_0)$ $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx = 1$ · $\int_a^b \delta(x)\,dx = \begin{cases}1, für\ 0 \in [a, b]\\ 0, sonst\end{cases}$ · $\delta(x) = \frac{d}{dx}\Theta(x)$ · $\mathrm{f}(x)\,\delta(x - x_0) = \mathrm{f}(x_0)\,\delta(x - x_0)$ · $\delta(x) = \delta(-x)$ $x\,\delta(x) = 0$ · $\delta(ax) = \frac{1}{\lvert a\rvert}\delta(x)$ · $\lvert x\rvert\,\delta(x^2) = \delta(x)$ · $\delta(\mathrm{f}(x)) = \sum_{x_i}\frac{\delta(x - x_i)}{\lvert \mathrm{f}'(x_i)\rvert}$; x_i … $\underline{einfache}\ NST$ · $\int\delta(x)\,dx = \mathrm{H}(x)$
Delta-Folgen	$\delta(x - x_0) = \lim_{n\to\infty}\delta_n(x - x_0)\ mit\ \delta_n(x - x_0) = \begin{Bmatrix}n\ für\ x_0 - \frac{1}{2n} < x < x_0 + \frac{1}{2n}\\ 0\ sonst\end{Bmatrix}$ · Gauss: $\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\pi}}e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}\right)$ Lorentz: $\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\right)$ · Dirichlet: $\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\pi}\frac{\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{x}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\pi t}\frac{\sin^2(xt)}{x^2}\right)$
Heaviside-Funktion	$\Theta(x) \leftrightarrow \Theta[\varphi] = \int_0^{\infty}\varphi(x)\,dx$; $\Theta(x - x_0) = \int_{-\infty}^{x-x_0}\delta(t)\,dt$; $\Theta(x) = \begin{cases}1\ für\ x > 0\\ \frac{1}{2}\ für\ x = 0\\ 0\ sonst\end{cases}$ · $\Theta(x - x_0) = 1 - \Theta(x_0 - x)$