

Elektrodynamik II

14.3.2019

Minkowski-Raum

Euklid. Raum	$s^2 = t^2 + x^2$ (hier und im Weiteren im Teil II immer mit Konvention: $c = 1$) $\Rightarrow$ immer $s^2 > 0$, wenn $t \neq 0 \vee x \neq 0$
Minkowski-Raum:	$s^2 = t^2 - x^2$ (Minus beinhaltet alle Effekte der SRT) $\Rightarrow s^2$ kann 0 werden, auch wenn $t \neq 0 \wedge x \neq 0$ $\Rightarrow s^2 > 0$... „zeitartig“ (weil $t^2 > x^2$) – innerhalb des Lichtkegels (Kausalität) $\Rightarrow s^2 < 0$... „raumartig“ (weil $x^2 > t^2$) – außerhalb des Lichtkegels (keine Wechselwirkung möglich)
Linienelement:	$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$; $ds^2 > 0$: zeitartig; $ds^2 < 0$: raumartig $\Rightarrow ds^2$... invariant
Eigenzeit $d\tau$:	$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = d\tau^2 \Rightarrow d\tau^2 = ds^2 \Rightarrow d\tau = \sqrt{ds^2} = \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} \Rightarrow$ $d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2}{dt^2} - \frac{dy^2}{dt^2} - \frac{dz^2}{dt^2}} \Rightarrow d\tau = dt \frac{1}{\gamma} \text{ mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{dx^2}{dt^2} - \frac{dy^2}{dt^2} - \frac{dz^2}{dt^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$

Lorentz-Tensoren der Stufe (p,q)

Definition	Lorentztensoren sind alle Objekte, die wie Tensoren unter (homogenen) Lorentz-Transformationen transformieren. Sie sind nicht „invariant“ im dem Sinne, dass die Komponenten unter Lorentz-Trafos gleich bleiben, sondern nur insofern als das „Objekt“ dasselbe bleibt (aber mit anderen Komponenten); z.B. bleibt das Skalarprodukt zweier transformierter 4er-Vektoren unverändert, weil sie immer noch „dieselben“ Vektoren sind, obwohl sie andere Koordinaten haben. Ein Tensor der Stufe (p, q) ... ist multilinear. ... hat p „obere“ (kontravariante) Indizes, und q „untere“ (kovariante) Indizes. ... kann daher auf p duale Vektoren (Index „unten“) und auf q Vektoren („Index oben“) wirken ... liefert dann als Ergebnis einen Skalar: $T: V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{K}$... $T(p, q) = \underbrace{T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}}_{\text{Tensor-komponenten}} \cdot \underbrace{\partial_{\mu_1}^{a_1} \dots \partial_{\mu_p}^{a_p}}_{\text{Basis } p \text{ mal kovar.}} \cdot \underbrace{dx_{b_1}^{\nu_1} \dots dx_{b_q}^{\nu_q}}_{\text{Ko-Basis } q \text{ mal kontravar.}}$ (wobei $a_1 \dots a_p$ und $b_1 \dots b_q$ abstrakte Indizes nach Penrose sind)
Vektorraum (allgemein)	Man nennt (V, Γ) einen Vektorraum V über den Skalkörper Γ (z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{C}$), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: $\exists$ Vektoradditionsoperator $+$: $u, v \in V \rightarrow (v + w) \in V$ („abgeschlossen in Bezug auf Vektoraddition“), so dass gilt: V1: Assoziativgesetz: $\forall u, v, w \in V: u + (v + w) = (u + v) + w$ V2: $\exists$ neutrales Vektorelement $\exists \vec{0} \in V: \forall v \in V: v + \vec{0} = \vec{0} + v$ V3: $\exists$ inverses Vektorelement $\forall v \in V \exists (-v) \in V: v + (-v) = \vec{0}$ V4: Kommutativgesetz: $\forall v, w \in V: v + w = w + v$ $\exists$ Multiplikationsoperator $\cdot$: $\lambda \in \Gamma, v \in V \rightarrow (\lambda \cdot v) \in V$ („abgeschlossen in Bezug auf Skalarmultiplikation“), so dass gilt: S1 assoziativ: $\forall \lambda \in \Gamma, \forall v, w \in V: \lambda \cdot (v + w) = \lambda v + \lambda w$ S2 distributiv: $\forall \lambda, \mu \in \Gamma, \forall v \in V: (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda v + \mu v$ S3: $\forall \lambda, \mu \in \Gamma, \forall v \in V: \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \mu) \cdot v$ S4: neutrales Element 1: $\forall v \in V: 1 \cdot v = v$
Tangentenraum	In jedem Punkt p gibt es einen Tangentialraum $T_p M$. Der Tangentialraum ist ein Vektorraum. Seine Elemente sind Tangentialvektoren v^a, die nicht Teil des Raumes sind (außer in euklidischen Räumen). $V = T_p M = \left\{ \underbrace{v^a}_{\text{Vektor}} = \underbrace{v^\mu}_{\text{Komponenten}} \underbrace{\partial_\mu^a}_{\text{Basis}} \right\}$ mit $\partial_\mu^a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big _p$ („Raum aller Richtungsableitungen im Punkt p“)
Dualraum	Der Dualraum $V^* \stackrel{\text{def}}{=} \{ \varphi: V \rightarrow \Gamma: \varphi \text{ ist linear} \}$ ist ein Vektorraum, dessen Elemente allen linearen Abbildungen $\varphi: V \rightarrow \mathbb{K}$ sind. Definition Vektoradditionsoperator: $(\varphi + \psi)(v) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(v) + \psi(v) \in \Gamma \forall v \in V$ Definition Multiplikationsoperator Skalar/Vektor: $(\lambda \cdot \varphi)(v) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \varphi(v) \in \Gamma \forall v \in V, \lambda \in \Gamma$
Kotangentenraum	In jedem Punkt p gibt es einen Kotangentenraum $T_p^* M$, der der Dualraum zum Tangentialraum $T_p M$ ist. $V^* = T_p^* M = \left\{ \underbrace{w_a}_{\text{Ko-Vektor}} = \underbrace{w_\mu}_{\text{Komponenten}} \underbrace{dx_a^\mu}_{\text{Kobasis}} \right\}$ wobei $\partial_\mu^a dx_a^\nu \stackrel{\text{def}}{=} \delta_\mu^\nu$ („Raum der lin. Funktionale, die jedem ∂_μ^a eine Zahl zuordnen“)
Spezialfall (1) (1,0)-Tensor	Ein (1,0)-Tensor ist ein Vektor $v^a = v^\mu \partial_\mu^a$. Er ist eine Abbildung $V^* \rightarrow \mathbb{R}$; $v(w) = \langle v, w \rangle = v^\mu w_\mu \mapsto \lambda \in \mathbb{R}$. Transformation: $\tilde{v}^\mu = \Lambda^\mu_\nu v^\nu$. Gleiche Transformation für Kobasisvektoren: $d\tilde{x}_a^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx_a^\nu$.
Spezialfall (2) (0,1)-Tensor	Ein (0,1)-Tensor ist ein Kovektor $w_a = w_\mu dx_a^\mu$. Er ist eine Abbildung $v \rightarrow \mathbb{R}$; $w(v) = \langle w, v \rangle = w_\mu v^\mu \mapsto \lambda \in \mathbb{R}$. Transformation: $\tilde{w}_\mu = \Lambda_\mu^\nu w_\nu$ (Λ_μ^ν ist die Inverse von Λ^μ_ν). Gleiche Lorentz-Trafo für Basisvektoren: $\tilde{\partial}_\mu^a = \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu^a$.
Spezialfall (3) Linienelement - Minkowskimetrik	Das Linienelement ds^2 kann nicht nur als skalarer Wert $ds^2 = dt^2 - dx^2$ interpretiert werden, sondern als symmetrischer (0,2)-Tensor $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_b^\nu = \eta_{ab}$ mit den Kobasisvektoren dx_a^μ und dx_b^ν. Die Komponenten $\eta_{\mu\nu}$ bezeichnet man als Minkowski-Metrik. Sie ist (wie jede Metrik) symmetrisch: $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$. Eine Metrik ist ein natürlicher Isomorphismus zwischen V und V^*. Sie erlaubt „Indexziehen“: $\eta_{\mu\nu} v^\nu = v_\mu$. Für die Minkowski-Metrik gilt: $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ (Westküsten- bzw. Teilchenphysik-Konvention). Trafo (allgemein): $\tilde{\eta}_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \eta_{\alpha\beta} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_{\nu\alpha}$. Lorentz-Trafo: $\tilde{\eta}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$
Spezialfall (4) Feldstärketensor	Der Feldstärketensor F_{ab} ist ein antisymmetrischer (0,2)-Tensor: $F_{ab} = F_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_b^\nu$; $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ Transformation: $\tilde{F}_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta F_{\alpha\beta}$

Poincaré- und Lorentz-Transformationen

	Poincaré-Trafos sind Transformationen, die die Minkowski-Metrik unverändert lassen: $\eta_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_b^\nu \stackrel{\text{allg.}}{=} \tilde{\eta}_{\mu\nu} d\tilde{x}_a^\mu d\tilde{x}_b^\nu \Big \tilde{\eta}_{\mu\nu} \stackrel{!}{=} \eta_{\mu\nu} \Rightarrow \eta_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_b^\nu \stackrel{!}{=} \underbrace{\eta_{\mu\nu} d\tilde{x}_a^\mu d\tilde{x}_b^\nu}_{\mu \rightarrow \alpha, \nu \rightarrow \beta}$ $\eta_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_b^\nu \stackrel{!}{=} \eta_{\alpha\beta} d\tilde{x}_a^\alpha d\tilde{x}_b^\beta \Big \tilde{x}^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} f^\alpha(x^\mu) \Rightarrow d\tilde{x}_a^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu} dx_a^\mu$ $\eta_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_b^\nu = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^\nu} dx_a^\mu dx_b^\nu \Rightarrow$ $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^\nu} = \eta_{\alpha\beta} \partial_\mu f^\alpha \partial_\nu f^\beta \Big \partial_\lambda \cdot$ $\partial_\lambda \eta_{\mu\nu} = \partial_\lambda (\eta_{\alpha\beta} \partial_\mu f^\alpha \partial_\nu f^\beta) = \eta_{\alpha\beta} (\partial_\lambda \partial_\mu f^\alpha) \partial_\nu f^\beta + \underbrace{\eta_{\alpha\beta} \partial_\mu f^\alpha (\partial_\lambda \partial_\nu f^\beta)}_{\alpha \leftrightarrow \beta}$ $\partial_\lambda \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} (\partial_\lambda \partial_\mu f^\alpha) \partial_\nu f^\beta + \eta_{\beta\alpha} \partial_\mu f^\beta (\partial_\lambda \partial_\nu f^\alpha) \Big \eta_{\beta\alpha} = \eta_{\alpha\beta}$ $\partial_\lambda \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} (\partial_\lambda \partial_\mu f^\alpha) \partial_\nu f^\beta + \eta_{\alpha\beta} \partial_\mu f^\beta (\partial_\lambda \partial_\nu f^\alpha) \Big \eta_{\mu\nu} = \left(\frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\nu\mu} \right)$ $\partial_\lambda \left(\frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\nu\mu} \right) = \eta_{\alpha\beta} (\partial_\lambda \partial_\mu f^\alpha) \partial_\nu f^\beta + \eta_{\alpha\beta} (\partial_\lambda \partial_\nu f^\alpha) \partial_\mu f^\beta \Big \eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$ $\partial_\lambda \left(\frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\nu\mu} \right) = \eta_{\alpha\beta} (\partial_\lambda \partial_\mu f^\alpha) \partial_\nu f^\beta + \eta_{\alpha\beta} (\partial_\lambda \partial_\nu f^\alpha) \partial_\mu f^\beta$ $\frac{1}{2} \partial_\lambda \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\lambda \eta_{\nu\mu} = \eta_{\alpha\beta} (\partial_\lambda \partial_\mu f^\alpha) \partial_\nu f^\beta + \eta_{\alpha\beta} (\partial_\lambda \partial_\nu f^\alpha) \partial_\mu f^\beta \Rightarrow$ $\frac{1}{2} \partial_\lambda \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} (\partial_\lambda \partial_\mu f^\alpha) \partial_\nu f^\beta \Rightarrow 0 = \eta_{\alpha\beta} (\partial_\lambda \partial_\mu f^\alpha) \partial_\nu f^\beta = \eta_{\alpha\beta} (\partial_\mu \partial_\lambda f^\alpha) \partial_\nu f^\beta \Big \partial_\nu f^\beta \neq 0 \text{ (darf nicht singular werden)} \Rightarrow$ $\partial_\mu \partial_\lambda f^\alpha = \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} = 0 \dots \text{Bedingung für Poincaré – Trafo}$ Lösung (Poincaré-Trafo): $f^\alpha(x^\mu) = \Lambda^\alpha_\mu x^\mu + p^\alpha$ mit $\Lambda^\alpha_\mu \dots$ Lorentz-Trafo (hom. Anteil); $p^\alpha \dots$ Raum-Zeit-Trafo (inhom. Anteil)
eigentliche und uneigentliche Lorentz-Trafo:	Die Lorentz-Transformation ist der homogene Anteil Λ^α_μ der Poincaré-Trafo. $\tilde{\eta}_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \Big \tilde{\eta}_{\rho\sigma} = \eta_{\rho\sigma} \text{ weil } \Lambda \text{ eine LT ist} \Rightarrow \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu = \Lambda^\alpha_\mu \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu = (\Lambda^T)_\mu^\alpha \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu \Rightarrow \underline{\underline{\eta = \Lambda^T \eta \Lambda}} \Rightarrow$ $\det(\eta) = \det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det(\Lambda^T) \det(\eta) \det(\Lambda) \Big \det(\eta) = -1 \Rightarrow -1 = -\det(\Lambda^T) \det(\Lambda) \Big \det(\Lambda^T) = \det(\Lambda) \Rightarrow$ $\det^2(\Lambda) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\det(\Lambda) = \pm 1}} \Big \text{eigentliche LT (keine Raumspiegelung): } \det(\Lambda) = +1, \text{ uneigentliche LT: } \det(\Lambda) = -1$
Inverse Lorentz-Trafo	Sei Λ eine LT, dann gilt: $\tilde{\eta} = \Lambda^T \eta \Lambda \dots (1)$ (wobei $\tilde{\eta} = \eta$). Sei Λ^{-1} die inverse LT, dann muss gelten: $\eta = (\Lambda^{-1})^T \tilde{\eta} \Lambda^{-1} \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$ $\eta = (\Lambda^{-1})^T \Lambda^T \eta \Lambda \Lambda^{-1} \Big \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Rightarrow \eta = (\Lambda^{-1})^T \eta \Lambda^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{\Lambda^{-1} \text{ ist eine Lorentz-Trafo (nämlich die Inverse zu } \Lambda)}}$

Lorentz-Gruppe

Gruppe (Definition)	Ein Paar $(G, \circ)$ heißt Gruppe, wenn die Menge $G \neq \emptyset$ und das zugehörige Gruppenprodukt $\circ$ folgende Eigenschaften erfüllt: $\circ: G \times G \rightarrow G$ (abgeschlossen in Bezug auf das Gruppenprodukt) $\forall a, b, c \in G: (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (assoziativ) $\forall a \in G: \exists \mathbb{1} \in G: a \circ \mathbb{1} = \mathbb{1} \circ a = a$ ($\exists$ Einheits) $\forall a \in G: \exists a^{-1} \in G: a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = \mathbb{1}$ ($\exists$ Inverse) Wenn zusätzlich gilt $\forall a, b \in G: a \circ b = b \circ a$ (kommutativ), dann ist $(G, \circ)$ eine abelsche Gruppe.
Lorentzgruppe	Die Menge der Lorentz-Transformationen LT bildet zusammen mit dem Matrixprodukt eine Gruppe: $\forall \Lambda_1, \Lambda_2 \in LT: \Lambda_1 \Lambda_2 \in LT \Leftrightarrow \eta \stackrel{?}{=} (\Lambda_1 \Lambda_2)^T \eta \Lambda_1 \Lambda_2 \Big (\Lambda_1 \Lambda_2)^T = \Lambda_1^T \Lambda_2^T \Rightarrow \eta = \Lambda_2^T \Lambda_1^T \eta \Lambda_1 \Lambda_2 \Big \Lambda_1^T \eta \Lambda_1 = \eta \Rightarrow \eta = \Lambda_2^T \eta \Lambda_2 \blacksquare$ $\forall \Lambda_1, \Lambda_2 \in LT: (\Lambda_1 \Lambda_2) \Lambda_3 = \Lambda_1 (\Lambda_2 \Lambda_3) \blacksquare$ (wegen Assoziativität des Matrixprodukts) $\forall \Lambda \in LT: \Lambda \mathbb{1} = \mathbb{1} \Lambda = \Lambda$ mit $\mathbb{1}_\beta^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \delta_\beta^\alpha$ $\forall \Lambda \in LT: \exists \Lambda^{-1}: \Lambda \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \Lambda = \mathbb{1}$, weil $\det(\Lambda) = \pm 1$ - eigentliche LT ($\det(\Lambda) = +1$) bilden die Gruppe $SO(D-1, 1)$ („spezielle orthogonale Gruppe“) - eigentliche und uneigentliche LT zusammen ($\det(\Lambda) = \pm 1$) bilden die Gruppe $O(D-1, 1)$ („orthogonale Gruppe“)
orthochron / nicht orthochron	$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \Big \stackrel{\mu \rightarrow 0}{\nu \rightarrow 0} \Rightarrow \eta_{00} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_0 \Lambda^\beta_0 = \eta_{00} \Lambda^0_0 \Lambda^0_0 + \sum_{i=1}^3 \eta_{ii} \Lambda^i_0 \Lambda^i_0 = \eta_{00} (\Lambda^0_0)^2 + \sum_{i=1}^3 \eta_{ii} (\Lambda^i_0)^2 \Big \eta_{00} = 1 \Rightarrow$ $1 = (\Lambda^0_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 \Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 \Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 \geq 1 \Rightarrow \text{zwei Lösungen:}$ $\Lambda^0_0 \geq +1 \dots \text{orthochrone Lorentz-Trafo (keine Zeitspiegelung); } \Lambda^0_0 \leq -1 \dots \text{nicht orthochrone Lorentz-Trafo (Zeitspiegelung)}$
Untergruppen Lorentzgruppe	orthochrone, eigentliche LTs: $\Lambda^0_0 \geq +1, \det(\Lambda) = +1$; (ab sofort sind mit LT immer orthochrone, eigentliche LTs gemeint) Λ bilden eine Untergruppe von LT, darstellbar als Folge von infinitesimalen Trafos orthochrone, uneigentliche LTs: $\Lambda^0_0 \geq +1, \det(\Lambda) = -1$ - PT mit P ... Paritätstransformation (Raumspiegelung $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$) nicht orthochrone, eigentliche LTs: $\Lambda^0_0 \leq -1, \det(\Lambda) = +1$ - PTA, bilden <u>keine</u> Untergruppe von LT, mit P ... Paritätstransformation ($\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$) und T ... Zeitspiegelung ($t \rightarrow -t$) nicht orthochrone, uneigentliche LTs: $\Lambda^0_0 \leq -1, \det(\Lambda) = -1$ - T mit T ... Zeitspiegelung ($t \rightarrow -t$) Rotationen Λ^i_j alleine bilden die Untergruppe $SO(D-1)$ mit $\frac{(D-1)(D-2)}{2}$ unabhängigen Einträgen (z.B. 3 unabh. Rot. in (3+1)D) Lorentzboosts Λ^i_0 bilden <u>keine</u> Untergruppe (Thomaspräzession!)

Lorentz-Algebra

Allgemeines	Die gesamte Lorentzgruppe enthält mehr Informationen als die Lorentzalgebra. Von der Algebra kann der Teil der Lorentzgruppe rekonstruiert werden, der mit der Einheit stetig verbunden ist (das sind die eigentlichen, orthochronen Lorentz-Trafos; in weiterer Folge einfach nur Lorentz-Trafos bzw. LTs genannt). Diese können mit infinitesimalen Lorentz-Trafos aus den Generatoren $L^{01}, L^{02}, L^{03}, L^{12}, L^{13}$ und L^{23} generiert werden. Die Kommutator-Relationen zwischen diesen Generatoren definieren die Lorentz-Algebra (eine Lie-Algebra).
Infinitesimale Transformation	$\Lambda^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\beta$ mit $\omega^\alpha_\beta \dots$ „klein“ ... (1) Invarianz der Minkowski-Metrik impliziert Antisymmetrie von $\omega_{\mu\nu}$: $\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \eta_{\alpha\beta} \stackrel{(1)}{=} (\delta^\alpha_\mu + \omega^\alpha_\mu)(\delta^\beta_\nu + \omega^\beta_\nu) \eta_{\alpha\beta} = (\delta^\alpha_\mu + \omega^\alpha_\mu)(\delta^\beta_\nu \eta_{\alpha\beta} + \omega^\beta_\nu \eta_{\alpha\beta}) = (\delta^\alpha_\mu + \omega^\alpha_\mu)(\eta_{\alpha\nu} + \omega_{\alpha\nu})$ $\eta_{\mu\nu} = \delta^\alpha_\mu \eta_{\alpha\nu} + \omega^\alpha_\mu \eta_{\alpha\nu} + \delta^\alpha_\nu \eta_{\mu\alpha} + \omega^\alpha_\nu \eta_{\mu\alpha} \Rightarrow \eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} + \omega_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\omega^2) \Rightarrow \omega_{\nu\mu} + \omega_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$
Generatoren	In D Raumzeit-Dimensionen gibt es $\frac{D(D-1)}{2}$ unabhängige Lorentz-Trafos (z.B. 3 Boosts und 3 Rotationen in (3+1) Dimensionen). $\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ -\omega_{01} & 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{02} & -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{03} & -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu} = \omega_{01}(L^{01})_{\mu\nu} + \omega_{02}(L^{02})_{\mu\nu} + \omega_{03}(L^{03})_{\mu\nu} + \omega_{12}(L^{12})_{\mu\nu} + \omega_{13}(L^{13})_{\mu\nu} + \omega_{23}(L^{23})_{\mu\nu}$ $(L^{01})_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu} \quad (L^{02})_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu} \quad (L^{03})_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu}$ $(L^{12})_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu} \quad (L^{13})_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu} \quad (L^{23})_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu}$ $(L^{01})^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\mu_\nu \quad (L^{02})^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\mu_\nu \quad (L^{03})^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\mu_\nu$ $(L^{12})^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\mu_\nu \quad (L^{13})^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\mu_\nu \quad (L^{23})^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\mu_\nu$ $(L^{01})^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \quad (L^{02})^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \quad (L^{03})^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu}$ $(L^{12})^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \quad (L^{13})^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \quad (L^{23})^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu}$ $[L^{\kappa\lambda}, L^{\mu\nu}] = \eta^{\lambda\mu} L^{\kappa\nu} - \eta^{\lambda\nu} L^{\kappa\mu} - \eta^{\kappa\mu} L^{\lambda\nu} + \eta^{\kappa\nu} L^{\lambda\mu}$ (z.B. $[L^{01}, L^{02}] = \eta^{10} L^{02} - \eta^{02} L^{01} = -L^{12}$) Merkregel: II AA - RR LL - LL RR + AA II
Lorentz-Algebra	SO(3)-Rotationen sind echte Unterlgebra (ohne Boosts): $[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k$ (mit $L_k = \frac{1}{2} \epsilon_{kab} L^{ab}$) Kommutator zwischen Rotation L_i und Boost K_j: $[L_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k$ (mit $K_k = L_{0k}$) Kommutator zwischen Boosts: $[K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} L_k$ (Boosts sind keine Unterlgebra - Thomaspräzession)
Darstellung durch Killing-Vektoren	Die Generatoren lassen sich durch homogene Differentialoperatoren 1. Ordnung (Killing-Vektoren) darstellen: $L^{\mu\nu} = (x^\mu \eta^{\nu\alpha} - x^\nu \eta^{\mu\alpha}) \partial_\alpha \dots (1)$ Dies erfüllt die Kommutatorrelation: $[L^{\kappa\lambda}, L^{\mu\nu}] = [(x^\kappa \eta^{\lambda\alpha} - x^\lambda \eta^{\kappa\alpha}) \partial_\alpha, (x^\mu \eta^{\nu\beta} - x^\nu \eta^{\mu\beta}) \partial_\beta]$ $= (x^\kappa \eta^{\lambda\alpha} - x^\lambda \eta^{\kappa\alpha}) \partial_\alpha (x^\mu \eta^{\nu\beta} - x^\nu \eta^{\mu\beta}) \partial_\beta - (x^\mu \eta^{\nu\beta} - x^\nu \eta^{\mu\beta}) \partial_\beta (x^\kappa \eta^{\lambda\alpha} - x^\lambda \eta^{\kappa\alpha}) \partial_\alpha$ $= (x^\kappa \eta^{\lambda\alpha} - x^\lambda \eta^{\kappa\alpha}) (\partial_\alpha x^\mu \eta^{\nu\beta} - \partial_\alpha x^\nu \eta^{\mu\beta}) \partial_\beta - (x^\mu \eta^{\nu\beta} - x^\nu \eta^{\mu\beta}) (\partial_\beta x^\kappa \eta^{\lambda\alpha} - \partial_\beta x^\lambda \eta^{\kappa\alpha}) \partial_\alpha$ $= (x^\kappa \eta^{\lambda\alpha} - x^\lambda \eta^{\kappa\alpha}) (\delta^\mu_\alpha \eta^{\nu\beta} - \delta^\nu_\alpha \eta^{\mu\beta}) \partial_\beta - (x^\mu \eta^{\nu\beta} - x^\nu \eta^{\mu\beta}) (\delta^\kappa_\beta \eta^{\lambda\alpha} - \delta^\lambda_\beta \eta^{\kappa\alpha}) \partial_\alpha$ $= (x^\kappa \eta^{\lambda\alpha} \delta^\mu_\alpha \eta^{\nu\beta} - x^\lambda \eta^{\kappa\alpha} \delta^\mu_\alpha \eta^{\nu\beta} - x^\kappa \eta^{\lambda\alpha} \delta^\nu_\alpha \eta^{\mu\beta} + x^\lambda \eta^{\kappa\alpha} \delta^\nu_\alpha \eta^{\mu\beta}) \partial_\beta - (x^\mu \eta^{\nu\beta} - x^\nu \eta^{\mu\beta}) (\delta^\kappa_\beta \eta^{\lambda\alpha} - \delta^\lambda_\beta \eta^{\kappa\alpha}) \partial_\alpha$ $= (x^\kappa \eta^{\lambda\mu} \eta^{\nu\beta} - x^\lambda \eta^{\kappa\mu} \eta^{\nu\beta} - x^\kappa \eta^{\lambda\nu} \eta^{\mu\beta} + x^\lambda \eta^{\kappa\nu} \eta^{\mu\beta}) \partial_\beta - (x^\mu \eta^{\nu\beta} - x^\nu \eta^{\mu\beta}) (\delta^\kappa_\beta \eta^{\lambda\alpha} - \delta^\lambda_\beta \eta^{\kappa\alpha}) \partial_\alpha$ $= (x^\kappa \eta^{\lambda\mu} \eta^{\nu\alpha} - x^\lambda \eta^{\kappa\mu} \eta^{\nu\alpha} - x^\kappa \eta^{\lambda\nu} \eta^{\mu\alpha} + x^\lambda \eta^{\kappa\nu} \eta^{\mu\alpha}) \partial_\alpha - (x^\mu \eta^{\nu\beta} - x^\nu \eta^{\mu\beta}) (\delta^\kappa_\beta \eta^{\lambda\alpha} - \delta^\lambda_\beta \eta^{\kappa\alpha}) \partial_\alpha$ $= (x^\kappa \eta^{\lambda\mu} \eta^{\nu\alpha} - x^\lambda \eta^{\kappa\mu} \eta^{\nu\alpha} - x^\kappa \eta^{\lambda\nu} \eta^{\mu\alpha} + x^\lambda \eta^{\kappa\nu} \eta^{\mu\alpha}) \partial_\alpha - (x^\mu \eta^{\nu\beta} \delta^\kappa_\beta \eta^{\lambda\alpha} - x^\nu \eta^{\mu\beta} \delta^\kappa_\beta \eta^{\lambda\alpha} - x^\mu \eta^{\nu\beta} \delta^\lambda_\beta \eta^{\kappa\alpha} + x^\nu \eta^{\mu\beta} \delta^\lambda_\beta \eta^{\kappa\alpha}) \partial_\alpha$ $= (x^\kappa \eta^{\lambda\mu} \eta^{\nu\alpha} - x^\lambda \eta^{\kappa\mu} \eta^{\nu\alpha} - x^\kappa \eta^{\lambda\nu} \eta^{\mu\alpha} + x^\lambda \eta^{\kappa\nu} \eta^{\mu\alpha}) \partial_\alpha - (x^\mu \eta^{\nu\kappa} \eta^{\lambda\alpha} - x^\nu \eta^{\mu\kappa} \eta^{\lambda\alpha} - x^\mu \eta^{\nu\lambda} \eta^{\kappa\alpha} + x^\nu \eta^{\mu\lambda} \eta^{\kappa\alpha}) \partial_\alpha$ $= (x^\kappa \eta^{\lambda\mu} \eta^{\nu\alpha} - x^\lambda \eta^{\kappa\mu} \eta^{\nu\alpha} - x^\kappa \eta^{\lambda\nu} \eta^{\mu\alpha} + x^\lambda \eta^{\kappa\nu} \eta^{\mu\alpha}) \partial_\alpha - (x^\mu \eta^{\nu\kappa} \eta^{\lambda\alpha} - x^\nu \eta^{\mu\kappa} \eta^{\lambda\alpha} - x^\mu \eta^{\nu\lambda} \eta^{\kappa\alpha} + x^\nu \eta^{\mu\lambda} \eta^{\kappa\alpha}) \partial_\alpha$ $= \eta^{\lambda\mu} (x^\kappa \eta^{\nu\alpha} - x^\nu \eta^{\kappa\alpha}) \partial_\alpha + \eta^{\kappa\mu} (x^\lambda \eta^{\nu\alpha} - x^\nu \eta^{\lambda\alpha}) \partial_\alpha + \eta^{\lambda\nu} (x^\kappa \eta^{\mu\alpha} - x^\mu \eta^{\kappa\alpha}) \partial_\alpha + \eta^{\kappa\nu} (x^\lambda \eta^{\mu\alpha} - x^\mu \eta^{\lambda\alpha}) \partial_\alpha \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$ $= \eta^{\lambda\mu} L^{\kappa\nu} - \eta^{\kappa\mu} L^{\lambda\nu} - \eta^{\lambda\nu} L^{\kappa\mu} + \eta^{\kappa\nu} L^{\lambda\mu}$
Rotation:	$L^{ij} = (x^i \eta^{jk} - x^j \eta^{ik}) \partial_k = x^i \eta^{jk} \partial_k - x^j \eta^{ik} \partial_k = x^i \partial^j - x^j \partial^i \Rightarrow [L^{ij} = -x^i \partial_j + x^j \partial_i]$ $(L^i)^\mu_\nu = \frac{1}{2} \epsilon_{i\alpha\beta} (L^{\alpha\beta})^\mu_\nu$ (Dualisieren mit $\frac{1}{2} \epsilon_{i\alpha\beta} \rightarrow$ aus Rotationsmatrizen werden Pseudovektoren, geht nur in 3 Raumdim.!) Drehung um x-Achse: $L_x = L_1 = \frac{1}{2} \epsilon_{123} L^{23} + \frac{1}{2} \epsilon_{132} L^{32} = \frac{1}{2} L^{23} - \frac{1}{2} L^{32} = L^{23} \Rightarrow$ Aktive Drehung um x: $(L_x)^\mu_\nu = (L^{23})^\mu_\nu$ Drehung um y-Achse: $L_y = L_2 = \frac{1}{2} \epsilon_{213} L^{13} + \frac{1}{2} \epsilon_{231} L^{31} = -\frac{1}{2} L^{13} + \frac{1}{2} L^{31} = -L^{13} \Rightarrow$ Aktive Drehung um y: $(L_y)^\mu_\nu = (-L^{13})^\mu_\nu$ Drehung um z-Achse: $L_z = L_3 = \frac{1}{2} \epsilon_{312} L^{12} + \frac{1}{2} \epsilon_{321} L^{21} = \frac{1}{2} L^{12} - \frac{1}{2} L^{21} = L^{12} \Rightarrow$ Aktive Drehung um z: $(L_z)^\mu_\nu = (L^{12})^\mu_\nu$
Boost:	$K^i = L^{i0} = (x^i \eta^{0k} - x^0 \eta^{ik}) \partial_k = x^i \eta^{0k} \partial_k - x^0 \eta^{ik} \partial_k = x^i \partial^0 - x^0 \partial^i = x^i \partial_0 + x^0 \partial_i \Big _{x^0=t; \partial_0=\partial_t} \Rightarrow [K^i = x^i \partial_t + t \partial_i]$ Aktiver Boost in Richtung i: $(K_i)^\mu_\nu = (L^{i0})^\mu_\nu$; passiver Boost in Richtung i: $(K_i)^\mu_\nu = (L^{0i})^\mu_\nu$ (geht in allen Dimensionen)

Endliche Lorentz-Trafo

Beispiel: aktive Rotation um z-Achse

Infinitesimale Rotation um z-Achse	$(L_z)^\mu_\nu = (L_{12})^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left((1 + \delta\vartheta L_z) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \delta\vartheta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \delta\vartheta \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$
Endliche Rotation	$\delta\vartheta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\vartheta}{n} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\vartheta}{n} L_z \right)^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \left \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\vartheta}{n} L_z \right)^n = e^{\vartheta L_z} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = e^{\vartheta L_z} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right e^{\vartheta L_z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k L_z^k}{k!} \Rightarrow$ $e^{\vartheta L_z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k L_z^k}{k!} = L_z^0 + \vartheta L_z + \frac{1}{2!} \vartheta^2 L_z^2 + \frac{1}{3!} \vartheta^3 L_z^3 + \dots$ $e^{\vartheta L_z} = 1 + \vartheta L_z + \frac{1}{2!} \vartheta^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \vartheta^3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4!} \vartheta^4 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots$ $e^{\vartheta L_z} = 1 + \vartheta L_z + \frac{1}{2!} \vartheta^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \vartheta^3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4!} \vartheta^4 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \dots$ $e^{\vartheta L_z} = 1 + \vartheta L_z + \frac{1}{2!} \vartheta^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \vartheta^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4!} \vartheta^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \dots$ $e^{\vartheta L_z} = 1 + \vartheta L_z + \frac{1}{2!} \vartheta^2 (-1) + \frac{1}{3!} \vartheta^3 (-L_z) + \frac{1}{4!} \vartheta^4 1 + \frac{1}{5!} \vartheta^5 L_z + \dots = 1 \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^4}{4!} - \dots \right) + L_z \left(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} - \dots \right)$ $e^{\vartheta L_z} = 1 \cos(\vartheta) + L_z \sin(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos(\vartheta) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sin(\vartheta) \Rightarrow e^{\vartheta L_z} = \Lambda = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \dots \text{aktive Drehmatrix}$

Analog: passiver Boost in x-Richtung

Infinitesimaler Boost in x-Richtung	$(K_x^{pass})^\mu_\nu = (K_{01})^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} t & -x \\ -x & t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \left((1 + \delta\xi K_x) \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} + \delta\xi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} + \delta\xi \begin{pmatrix} -x \\ -t \end{pmatrix}$
Endlicher Boost	$\delta\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi}{n} \Rightarrow \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\xi}{n} K_x \right)^n \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \left \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\xi}{n} K_x \right)^n = e^{\xi K_x} \Rightarrow \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = e^{\xi K_x} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \right e^{\xi K_x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n K_x^n}{n!} \Rightarrow$ $e^{\xi K_x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n K_x^n}{n!} = K_x^0 + \xi K_x + \frac{1}{2!} \xi^2 K_x^2 + \frac{1}{3!} \xi^3 K_x^3 + \dots$ $e^{\xi K_x} = 1 + \xi K_x + \frac{1}{2!} \xi^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \xi^3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4!} \xi^4 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^4 + \dots$ $e^{\xi K_x} = 1 + \xi K_x + \frac{1}{2!} \xi^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \xi^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4!} \xi^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \dots$ $e^{\xi K_x} = 1 + \xi K_x + \frac{1}{2!} \xi^2 1 + \frac{1}{3!} \xi^3 K_x + \frac{1}{4!} \xi^4 1 + \frac{1}{5!} \xi^5 K_x + \dots = 1 \left(1 + \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^4}{4!} - \dots \right) + K_x \left(\xi + \frac{\xi^3}{3!} + \frac{\xi^5}{5!} - \dots \right)$ $e^{\xi K_x} = 1 \cosh(\xi) + K_x \sinh(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cosh(\xi) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sinh(\xi) \Rightarrow$ $e^{\xi K_x} = \Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \cosh(\xi) & -\sinh(\xi) \\ -\sinh(\xi) & \cosh(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \text{ mit } \beta = \tanh(\xi); \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \dots \text{Hyperb. Drehmatrix, passive LT}$

Variationsrechnung und Euler-Lagrange

Funktional (Definition)	Allgemein: Sei (V, K) ein Vektorraum V mit dem Zahlenkörper K, dann ist ein Funktional T eine Abbildung $T: V \rightarrow K$. Meist ist V ein Funktionenraum. Dann ist ein Funktional (grob gesprochen) eine Funktion, die eine Funktion als Input bekommt, und als Ergebnis eine Zahl liefert. Dies sei hier angenommen. Ein Beispiel für ein Funktional ist die Delta-Distribution, die als Input eine Funktion $f(x)$ erwartet, und als Output den Wert der Funktion an der Stelle 0 liefert: $\delta[f(x)] = \langle \delta(x), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} f(0)$
Variation	Ein Funktional entsteht aus der Verallgemeinerung einer Funktion auf unendlich viele (kontinuierliche) Variablen: - Aus den endlich vielen Variablen wird ein Kontinuum: $q_1, \dots, q_n \rightarrow q(t); f(q_1, \dots, q_n) \rightarrow f[q(t)]$. - Außerdem: $\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} \rightarrow \frac{\delta q(t)}{\delta q(t')} = \delta(t - t') \dots (1)$. - Wenn man bei der Funktion $f(q_1, \dots, q_n)$ alle Variablen bis auf q_k festhält, dann wird aus $f(q_1, \dots, q_n)$ die Funktion $f(q_k)$, und es gilt: $\partial f(q_k) = \frac{\partial f(q_k)}{\partial q_k} \partial q_k = \frac{\partial f(q_k)}{\partial q_k} \partial q_k + \sum_{i \neq k} \underbrace{\frac{\partial f(q_k)}{\partial q_i}}_{\substack{0 \text{ weil} \\ f=f(q_k)}} \partial q_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(q_k)}{\partial q_i} \partial q_i \Rightarrow \partial f(q_k) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(q_k)}{\partial q_i} \partial q_i$ - Übergang zum Kontinuierlichen: $q_k \rightarrow q(t), q_i \rightarrow q(t'), \partial f(q_k) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(q_k)}{\partial q_i} \partial q_i \rightarrow \delta f[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta f[q(t)]}{\delta q(t')} \delta q(t') dt' \dots (2)$ - Die Variation $\delta f[q(t)]$ ist daher: $\delta f[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta f[q(t)]}{\delta q(t')} \delta q(t') dt' = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta f[q(t)]}{\delta q(t)} \frac{\delta q(t)}{\delta q(t')} \delta q(t') dt' \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$ $\delta f[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta f[q(t)]}{\delta q(t)} \delta(t - t') \delta q(t') dt' \Rightarrow \boxed{\delta f[q(t)] = \frac{\delta f[q(t)]}{\delta q(t)} \delta q(t)} \dots (3)$ $\delta f[q(t)] \stackrel{\text{def}}{=} f[q(t) + \delta q(t)] - f[q(t)] \approx f[q(t)] + \frac{\partial f[q(t)]}{\partial q(t)} \delta q(t) - f[q(t)] \Rightarrow \delta f[q(t)] \approx \frac{\partial f[q(t)]}{\partial q(t)} \delta q(t) : \delta q(t) \Rightarrow$ $\frac{\delta f[q(t)]}{\delta q(t)} = \frac{\partial f[q(t)]}{\partial q(t)} \dots (4) \stackrel{(3)}{\Rightarrow}$ $\boxed{\delta f[q(t)] = \frac{\partial f[q(t)]}{\partial q(t)} \delta q(t)} \text{ Bei mehreren Variablen: } \boxed{\delta f[q(t), p(t), \dots] = \frac{\partial f}{\partial q(t)} \delta q(t) + \frac{\partial f}{\partial p(t)} \delta p(t) + \dots} \dots (5)$
Extremalbedingung Für Euler-Lagrange	Gegeben sei das Funktional $S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$ (die Wirkung). Gesucht ist diejenige Funktion $q(t)$, die $S[q(t)]$ für feste Werte t_1 und t_2 extremal (z.B. minimal) macht. Wir betrachten daher eine weitere Funktion $\tilde{q}(t)$, die sich von $q(t)$ nur um eine infinitesimale Funktion $\delta q(t)$ unterscheidet: $\tilde{q}(t) = q(t) + \delta q(t)$. Die Funktion $\delta q(t)$ können wir durch eine beliebige Funktion $\eta(t)$ und einen kleinen Parameter ε so ausdrücken: $\delta q_\varepsilon(t) = \delta q(t, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon \eta(t)$. Es wird lediglich verlangt, dass $\eta(t)$ differenzierbar ist und $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$. Damit ergibt sich: $\tilde{q}(t, \varepsilon) = q(t) + \varepsilon \eta(t)$ („äußere Variation“). Die gesuchte Funktion $q(t)$ ist daher $q(t) = \tilde{q}(t, 0) \dots (6)$. Wir halten nun $q(t)$ und $\eta(t)$ fest, und definieren die Funktion $s(\varepsilon) = S[\tilde{q}(t, \varepsilon)] = S[q(t) + \varepsilon \eta(t)]$, welche nur mehr von ε abhängt. Wegen (6) wird die Funktion $s(\varepsilon)$ bei $\varepsilon = 0$ extremal. Daher gilt die Bedingung $\left. \frac{ds(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=0} = 0 \dots (7a)$ (entspricht $\delta S[q] d\varepsilon = 0 \Rightarrow \delta S[q] = 0$) $\dots (7b)$

helmut@goldsilberglitzer.at

Noether-Theorem

Theorem:	„Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie existiert eine Erhaltungsgröße“
Wirkung:	$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt$ (Anmerkung: L nicht von t abhängig – konservatives System)
Infinitesimale Trafo	$t \rightarrow \tilde{t} = t + \delta t \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon T(q, \dot{q}, t) \dots (2) \quad q(t) \rightarrow \tilde{q}(\tilde{t}) = q(t) + \delta q \dots (3) \quad \delta q \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon Q(q, \dot{q}, t) \dots (4)$ $\tilde{q}(t) = q(t) + \delta q \dots (5) \Rightarrow \delta q \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{q}(t) - q(t) = \tilde{q}(\tilde{t}) - \tilde{q}(\tilde{t}) + \tilde{q}(\tilde{t}) - q(t) \stackrel{(3)}{=} q(t) + \delta q - \tilde{q}(\tilde{t}) + \tilde{q}(\tilde{t}) - q(t)$ $\delta q = \delta q - \tilde{q}(\tilde{t}) + \tilde{q}(t) = \delta q - (\tilde{q}(\tilde{t}) - \tilde{q}(t)) \stackrel{(1)}{=} \delta q - (\tilde{q}(t + \delta t) - \tilde{q}(t)) \Big \tilde{q}(t + \delta t) \approx \tilde{q}(t) + \dot{\tilde{q}}(t) \delta t \Rightarrow$ $\delta q = \delta q - (\tilde{q}(t) + \dot{\tilde{q}}(t) \delta t - \tilde{q}(t)) = \delta q - \dot{\tilde{q}}(t) \delta t \stackrel{(3)}{=} \delta q - (\dot{q}(t) + \delta \dot{q}) \delta t = \delta q - \dot{q}(t) \delta t + \delta \dot{q} \delta t \Big \delta \dot{q} \delta t \approx 0$ $\delta q = \delta q - \dot{q}(t) \delta t \dots (6)$
Noether-strom	Die BWGL bleiben invariant, wenn sich die Wirkung S unter der Transformation höchstens um eine Konstante $\varepsilon \alpha$ ändert (weil die Transformation infinitesimal ist, muss auch diese Konstante infinitesimal sein, was durch infinitesimales ε bewirkt wird). $S[q(t)] = S[\tilde{q}(t)] + \varepsilon c \Rightarrow S[\tilde{q}(t)] = S[q(t)] - \varepsilon \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{df(t)}{dt} dt = \text{const.} \Rightarrow$ $\int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \stackrel{\text{Symmetr.}}{=} \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} L(\tilde{q}(\tilde{t}), \dot{\tilde{q}}(\tilde{t}), \tilde{t}) d\tilde{t} - \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{df(t)}{dt} dt \stackrel{(1)}{=} \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_2 + \delta t_2} (L(\tilde{q}(\tilde{t}), \dot{\tilde{q}}(\tilde{t}), \tilde{t}) - \varepsilon \frac{df(t)}{dt}) d\tilde{t}$ $\stackrel{(5)}{=} \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_2 + \delta t_2} \left(L(q(t) + \delta q, \dot{q}(t) + \delta \dot{q}, t) - \varepsilon \frac{df(t)}{dt} \right) dt$ $\approx \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_2 + \delta t_2} \left(L(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q(t)} \delta q + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q} - \varepsilon \frac{df(t)}{dt} \right) dt$ $= \int_{t_1}^{t_2} \left(L(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q(t)} \delta q + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q} - \varepsilon \frac{df(t)}{dt} \right) dt -$ $\int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \left(L(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q(t)} \delta q + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q} - \varepsilon \frac{df(t)}{dt} \right) dt +$ $\int_{t_2}^{t_2 + \delta t_2} \left(L(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q(t)} \delta q + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q} - \varepsilon \frac{df(t)}{dt} \right) dt$ $\approx \int_{t_1}^{t_2} \left(L(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q(t)} \delta q + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q} - \varepsilon \frac{df(t)}{dt} \right) dt -$ $\left(L(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1) + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q(t)} \delta q + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q} \delta t_1 - \varepsilon \frac{df(t)}{dt} \right) \delta t_1 +$ $\left(L(q(t_2), \dot{q}(t_2), t_2) + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q(t)} \delta q + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q} - \varepsilon \frac{df(t)}{dt} \right) \delta t_2$ $\int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q(t)} \delta q dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q} dt - \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{df(t)}{dt} dt -$ $L(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1) \delta t_1 + L(q(t_2), \dot{q}(t_2), t_2) \delta t_2 \Big - \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$ $0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q(t)} \delta q dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q} dt - \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{df(t)}{dt} dt - \underbrace{L(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1) \delta t_1}_{\equiv L_1 \delta t_1} + \underbrace{L(q(t_2), \dot{q}(t_2), t_2) \delta t_2}_{\equiv L_2 \delta t_2}$ $0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q(t)} \delta q dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q} dt - \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{df(t)}{dt} dt - L_1 \delta t_1 + L_2 \delta t_2 \Big \delta \dot{q} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\tilde{q}}(t) d\varepsilon$ $0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial q} L(q(t), \dot{q}(t), t) \delta q dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L(q(t), \dot{q}(t), t) \dot{\tilde{q}}(t) d\varepsilon dt - \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{df(t)}{dt} dt - L_1 \delta t_1 + L_2 \delta t_2 \Big \dot{\tilde{q}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} f'$ $0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial q} L(q(t), \dot{q}(t), t) \delta q dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L(q(t), \dot{q}(t), t) f' d\varepsilon dt - \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{df(t)}{dt} dt - L_1 \delta t_1 + L_2 \delta t_2 \Big \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L(q(t), \dot{q}(t), t) \stackrel{\text{def}}{=} g$ $0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial q} L(q(t), \dot{q}(t), t) \delta q dt + \int_{t_1}^{t_2} g f' d\varepsilon dt - \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{df(t)}{dt} dt - L_1 \delta t_1 + L_2 \delta t_2 \Big \int_{t_1}^{t_2} g f' d\varepsilon dt = (fg) _{t_1}^{t_2} d\varepsilon - \int_{t_1}^{t_2} g' f d\varepsilon dt$ $0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial q} L(q(t), \dot{q}(t), t) \delta q dt + (fg) _{t_1}^{t_2} d\varepsilon - \int_{t_1}^{t_2} g' f d\varepsilon dt - \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{df(t)}{dt} dt - L_1 \delta t_1 + L_2 \delta t_2$ $0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial q} L(q(t), \dot{q}(t), t) \delta q dt + \left[\tilde{q}(t) d\varepsilon \frac{\partial}{\partial q} L(q(t), \dot{q}(t), t) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} g' f d\varepsilon dt - \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{df(t)}{dt} dt - L_1 \delta t_1 + L_2 \delta t_2 \Big \tilde{q}(t) d\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \delta q$ $0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial q} L(q(t), \dot{q}(t), t) \delta q dt + \left[\delta q \frac{\partial}{\partial q} L(q(t), \dot{q}(t), t) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} g' f d\varepsilon dt - \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{df(t)}{dt} dt - L_1 \delta t_1 + L_2 \delta t_2$ $0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial q} L(q(t), \dot{q}(t), t) \delta q dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\delta q \frac{\partial L}{\partial q} \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} g' f d\varepsilon dt - \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{df(t)}{dt} dt - L_1 \delta t_1 + L_2 \delta t_2 \Big \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\delta q \frac{\partial L}{\partial q} \right) dt \dots \text{Randterm}$ $0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial q} L(q(t), \dot{q}(t), t) \delta q dt - \int_{t_1}^{t_2} g' f d\varepsilon dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{df(t)}{dt} dt - L_1 \delta t_1 + L_2 \delta t_2 \Big f \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{q}(t)$ $0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial q} L(q(t), \dot{q}(t), t) \delta q dt - \int_{t_1}^{t_2} g' \tilde{q}(t) d\varepsilon dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{df(t)}{dt} dt - L_1 \delta t_1 + L_2 \delta t_2 \Big \tilde{q}(t) d\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \delta q$ $0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial q} L(q(t), \dot{q}(t), t) \delta q dt - \int_{t_1}^{t_2} g' \delta q dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{df(t)}{dt} dt - L_1 \delta t_1 + L_2 \delta t_2 \Big g' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L(q(t), \dot{q}(t), t)$ $0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial q} L(q(t), \dot{q}(t), t) \delta q dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{df(t)}{dt} dt - L_1 \delta t_1 + L_2 \delta t_2$ $0 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{df(t)}{dt} dt - L_1 \delta t_1 + L_2 \delta t_2 \Big \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \stackrel{ELGR}{=} 0$ $0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{df(t)}{dt} dt + L_2 \delta t_2 - L_1 \delta t_1 \Big L_1 \delta t_1 = L(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1) \delta t_1$ $0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{df(t)}{dt} dt + L(q(t_2), \dot{q}(t_2), t_2) \delta t_2 - L(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1) \delta t_1$ $0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{df(t)}{dt} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (L(q(t), \dot{q}(t), t) \delta t) dt$ $0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(L \delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q - \varepsilon f(t) \right) dt \stackrel{(6)}{\Rightarrow}$ $0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(L \delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (\delta q - \dot{q}(t) \delta t) - \varepsilon f(t) \right) dt \Big \text{kann allg. für alle } t_1 \text{ und } t_2 \text{ nur verschwinden, wenn der Integrand null ist.}$ $0 = \frac{d}{dt} \left(L \delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (\delta q - \dot{q}(t) \delta t) - \varepsilon f(t) \right)$ $0 = \frac{d}{dt} \left(L \delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q}(t) \delta t - \varepsilon f(t) \right)$ $0 = \frac{d}{dt} \left(\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q}(t) \right) \delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q - \varepsilon f(t) \right) \stackrel{(2),(4)}{\Rightarrow}$ $0 = \frac{d}{dt} \left(\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q}(t) \right) \varepsilon T + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \varepsilon Q - \varepsilon f(t) \right) \Big : \varepsilon \Rightarrow$ $\frac{d}{dt} \left(\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q}(t) \right) T + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} Q - f(t) \right) = \frac{d}{dt} J = 0$ mit Noetherstrom $J = \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q}(t) \right) T + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} Q - f(t)$

Noether-Theorem: Beispiele

Energie- erhaltung	$T = 1; Q = 0, f = 0 \Rightarrow J = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q}(t) = L - p\dot{q} \stackrel{\text{def}}{=} -H \dots$ Hamiltonfunktion ist Noetherstrom der Zeittranslationsinvarianz
Impuls- erhaltung	$T = 0; Q = 1, f = 0 \Rightarrow J = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \stackrel{\text{def}}{=} p \dots$ Impulserhaltung bei Invarianz unter Translationen von q
Drehimpuls- erhaltung	$T = 1; Q = 0, f = \alpha t \Rightarrow J = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q}(t) - \alpha t \dots$ Drehimpulserhaltung bei Rotationsinvarianz
Symmetrie- test	Transformation $L \rightarrow L + \delta L$. Wenn $\delta L = 0 \Rightarrow$ Symmetrie unter Transformation Wenn $\delta L = \frac{d}{dt} \varepsilon f(t)$ (totaler Ableitungsterm), dann verändert sich die Wirkung S nur um die Konstante $\int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \frac{df(t)}{dt} dt$ und die Bewegungsgleichungen ändern sich nicht $\Rightarrow$ Symmetrie unter Transformation

Feldtheorie

Mechanik als Feldtheorie	Mechanik ist eine Feldtheorie in einer Dimension (des Wirkungsfunctionals): $S[q_i] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i) dt$ $\text{Dim}=1$ Beispiel 1: $L = \frac{q_1^2(t)}{2} \dots$ Ein einzelnes freies Teilchen in einer Raumdimension Beispiel 2: $L = \frac{q_1^2(t)}{2} + \frac{q_2^2(t)}{2} \dots$ Zwei einzelne freie Teilchen in einer Raumdimension, ein Teilchen in zwei Raumdimensionen
Allgemeine Feldtheorie	$t \rightarrow x^\mu$ mit $\mu = 0 \dots D-1$; $q_i(t) \rightarrow \Phi_i(x^\mu) \dots$ hier: Skalarfeld $\Phi_i(x^\mu)$. Mechanik: Jedem Zeitpunkt t werden Koordinaten $q_i(t)$ zugeordnet. Allgemeine Feldtheorie: Jedem Punkt x^μ der Raumzeit werden ein Felder $\Phi_i(x^\mu)$ zugeordnet (Hier: Skalarfelder) $L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) \rightarrow L(\Phi_i(x^\mu), \partial_\mu \Phi_i(x^\mu)) \dots$ aus der Lagrangefunktion L wird die Lagrangedichte $\mathcal{L}$
Euler-Lagrange in 3+1 Dim.	$\delta S[\Phi_i] = 0 \Rightarrow \int_{\mathcal{M}} \delta \mathcal{L} d^4x = \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \delta \Phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Phi_i)} \partial_\nu \delta \Phi_i \right) d^4x = 0 \mid \partial_\nu \delta \Phi_i = \delta \partial_\nu \Phi_i \Rightarrow$ $\int_{\mathcal{M}} \delta \mathcal{L} d^4x = \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \delta \Phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Phi_i)} \delta (\partial_\nu \Phi_i) \right) d^4x = 0 \mid$ entspricht $\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt$ $\int_{\mathcal{M}} \delta \mathcal{L} d^4x = \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \delta \Phi_i - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Phi_i)} \delta \Phi_i \right) d^4x + \int_{\mathcal{M}} \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Phi_i)} \delta \Phi_i \right) d^4x = 0 \dots (1) \Rightarrow$ $\underbrace{\int_{\mathcal{M}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \delta \Phi_i - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Phi_i)} \delta \Phi_i \right) d^4x}_{\text{entspricht } \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right) dt} \quad \underbrace{\int_{\mathcal{M}} \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Phi_i)} \delta \Phi_i \right) d^4x}_{\text{Randterm (angenommen 0) entspricht } \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right) dt}$ Euler-Lagrange-Bewegungsgleichung (wenn Randterm = 0): $\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Phi_i)} \right] = 0 \dots (2)$ entspricht $\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$
Noether- theorem in D Dimensionen	vgl. Integranden von (1) $\Rightarrow \delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \delta \Phi_i - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \delta \Phi_i + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \delta \Phi_i \right) \Rightarrow \delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \delta \Phi_i \right) \dots (2)$ $\underbrace{=0 \text{ wegen Euler-Lagrange}}$ Infinitesimale Trafo: $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta \mathcal{L} \Rightarrow$ Wenn $\delta \mathcal{L} = 0$ oder $\delta \mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu$ (totaler Ableitungsterm), dann verändert sich die Wirkung S nur um eine Konstante und die Bewegungsgleichungen ändern sich nicht $\Rightarrow$ Symmetrie unter Transformation
Noether- strom	$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu \Rightarrow \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \delta \Phi_i \right) = \partial_\mu K^\mu \Rightarrow \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \delta \Phi_i - K^\mu \right) = 0 \Rightarrow$ $\partial_\mu j^\mu = 0$ mit $j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_i)} \delta \Phi_i - K^\mu \dots (3)$ Noetherstrom (kovariant erhalten)
Noether- ladung in 3+1 Dimensionen	$\partial_\mu j^\mu = 0 \Rightarrow \partial_i j^i + \partial_0 j^0 = 0 \mid \partial_0 = \frac{d}{dt} \Rightarrow \partial_i j^i + \frac{d}{dt} j^0 = 0 \Rightarrow \int_V \partial_i j^i d^3x + \int_V \frac{d}{dt} j^0 d^3x = 0 \xrightarrow{\text{Gauß}}$ $\int_{\partial V} j^i d^2x_i + \int_V \frac{d}{dt} j^0 d^3x = 0 \mid$ Wenn Fluss durch Oberfläche = 0 $\Rightarrow \int_V \frac{d}{dt} j^0 d^3x = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_V j^0 d^3x = 0 \Rightarrow$ $\underbrace{\text{Fluss durch Oberfläche}}_{\text{Fluss durch Oberfläche}}$ $\frac{d}{dt} Q = 0$ mit $Q = \int_V j^0 d^3x \dots (4)$ Noetherladung erhalten in der Zeit, wenn Fluss durch Oberfläche = 0 oder keine Oberfläche
Beispiel 4er-Impuls- Erhaltung, Energie- Impuls- tensor	Die Poincaré-Transformation $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$ (Raumzeittranslation) führt zu 4er-Impulserhaltung (also Energie/Impulserhaltung) $\Phi(x^\sigma) \rightarrow \Phi(x^\sigma + \xi^\sigma) \approx \Phi(x^\sigma) + \xi^\alpha \partial_\alpha \Phi(x^\sigma) = \Phi(x^\sigma) + \delta \Phi(x^\sigma) \Rightarrow \delta \Phi(x^\sigma) = \xi^\alpha \partial_\alpha \Phi(x^\sigma) \dots (5)$ $\mathcal{L}(x^\sigma) \rightarrow \mathcal{L}(x^\sigma + \xi^\sigma) \approx \mathcal{L}(x^\sigma) + \xi^\alpha \partial_\alpha \mathcal{L}(x^\sigma) \mid \xi^\alpha = \text{const.} \Rightarrow \xi^\alpha \partial_\alpha \mathcal{L} = \partial_\alpha (\xi^\alpha \mathcal{L})$ $\mathcal{L}(x^\sigma + \xi^\sigma) \approx \mathcal{L}(x^\sigma) + \partial_\alpha (\xi^\alpha \mathcal{L}(x^\sigma)) = \mathcal{L}(x^\sigma) + \delta \mathcal{L}(x^\sigma) \Rightarrow \delta \mathcal{L}(x^\sigma) = \partial_\alpha K^\alpha = \partial_\alpha (\xi^\alpha \mathcal{L}(x^\sigma)) \Rightarrow K^\alpha = \xi^\alpha \mathcal{L}(x^\sigma) \dots (6)$ $(3) \Rightarrow j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi - K^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi - \xi^\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \xi^\alpha \partial_\alpha \Phi - \xi^\mu \mathcal{L} = \xi^\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \partial_\alpha \Phi - \xi^\mu \mathcal{L} \right) \Rightarrow$ $j^\mu = \xi^\alpha T^\mu_\alpha$ mit $T^\mu_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \partial_\alpha \Phi - \delta^\mu_\alpha \mathcal{L} \dots$ Energie-Impuls-Tensor

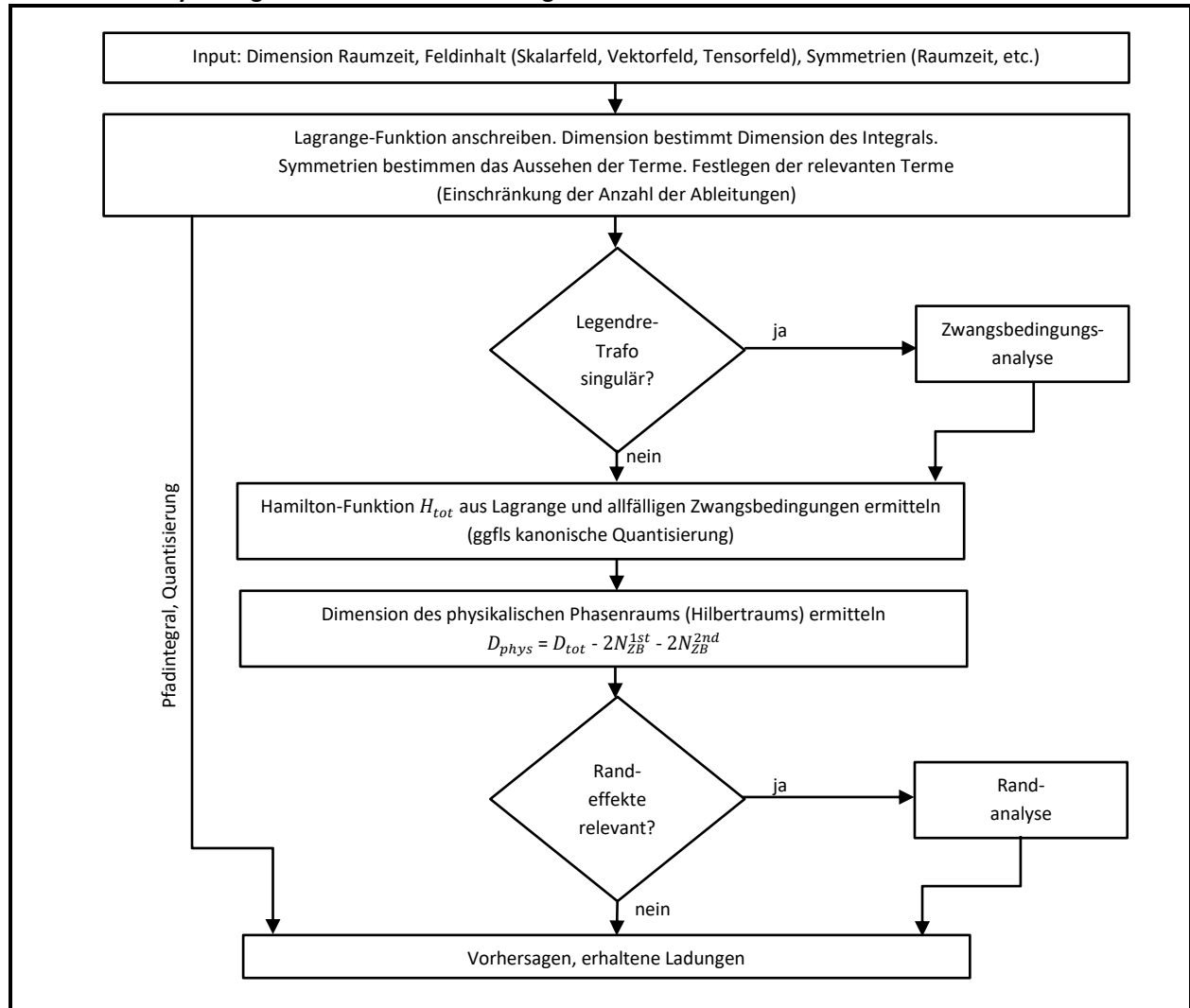
Hamilton-Formalismus und Legendre-Transformation

Legendre-Trafo	Erklärung in 1D: Sei $y = y(x(\xi))$ mit $\xi = \frac{dy}{dx}$. Dann ist die Trafo $y(x) \rightarrow f(\xi) = y(x(\xi))$ nicht eindeutig, weil die Umkehrtransformation $f(\xi) \rightarrow y(x) = f^{-1}(y(x))$ nicht eindeutig ist. Lösung: Legendre-Trafo: $y(x(\xi)) \rightarrow y^\circ(\xi) = y(x(\xi)) - x\xi = y(x(\xi)) - x \frac{dy}{dx}$ Involutiv: $(y^\circ)^\circ = y$
Kanonische Hamilton-funktion	$y = L(q_i, \dot{q}^i) \rightarrow y^\circ = L(q_i, \dot{q}^i) - \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \stackrel{\text{def}}{=} p_i \Rightarrow y^\circ = L(q_i, \dot{q}^i) - p_i \dot{q}^i \stackrel{\text{def}}{=} -H_{can} \Rightarrow$ $-y^\circ \stackrel{\text{def}}{=} H_{can}(q_i, p^i) = p_i \dot{q}^i - L(q_i, \dot{q}^i) \dots (1a) \Rightarrow L(q_i, \dot{q}^i) = p_i(\dot{q}^i) \dot{q}^i - H_{can}(q_i, p_i(\dot{q}^i)) \dots (1b) \Rightarrow$ $H_{can}(q_i, p^i) = p^i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i) \dots (1c)$ Bsp.: $L(q, \dot{q}) = T - V = \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q) \rightarrow H = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \dot{q} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q) \right) - L = \dot{q} 2 \frac{m\dot{q}}{2} - \frac{m\dot{q}^2}{2} + V(q) = m\dot{q}^2 - \frac{m\dot{q}^2}{2} + V(q) = \frac{m\dot{q}^2}{2} + V(q)$ $H = \frac{m\dot{q}^2}{2} + V(q) \mid p \stackrel{\text{def}}{=} m\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m} \Rightarrow H(q, p) = \frac{m}{2} \left(\frac{p}{m} \right)^2 + V(q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$
Hamilton-Bewegungsgleichungen	$\delta S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q, \dot{q}) dt = 0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta(p\dot{q} - H(q, p)) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta(p\dot{q}) - \delta H(q, p)) dt = 0$ $\int_{t_1}^{t_2} (\delta p \dot{q} + p \delta \dot{q} - \delta H(q, p)) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta p \dot{q} + p \delta \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p) dt = 0$ $\int_{t_1}^{t_2} (\delta p (\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}) + p \delta \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q) dt \mid p \delta \dot{q} = p \delta \frac{d}{dt} q = \frac{d}{dt} (p \delta q) - \frac{d}{dt} p \delta q = \frac{d}{dt} (p \delta q) - p \delta q$ $\int_{t_1}^{t_2} (\delta p (\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}) + \frac{d}{dt} (p \delta q) - p \delta q - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q) dt = 0 \mid \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (p \delta q) dt = [p \delta q(t)]_{t_1}^{t_2} = 0 \text{ (Randterm)}$ $\int_{t_1}^{t_2} (\delta p (\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}) - \delta q (\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q})) dt = 0 \mid \text{kann allg. für alle } t_1 \text{ und } t_2 \text{ nur verschwinden, wenn der Integrand null ist}$ $\delta p (\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}) - \delta q (\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}) = 0 \mid \delta p \neq 0, \delta q \neq 0 \Rightarrow$ $\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} = 0; \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} = 0$ $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \{q, H\}; \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \{p, H\} \dots (2) \text{ Hamilton-Bewegungsgleichungen.}$ Unterschied zu Lagrange: p und q werden unabhängig variiert. Der Phasenraum ist doppelt so groß, dafür erhält man Differenzialgleichungen erster Ordnung statt zweiter Ordnung.
Poisson-Klammer	$\{x, y\} = \sum_i \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial x}{\partial p_i} \frac{\partial y}{\partial q_i}$ $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}; \{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0; \{y, x\} = -\{x, y\}; \{x, y+z\} = \{x, y\} + \{x, z\};$ $\{ax, by\} = \alpha\beta\{x, y\}; \{x, yz\} = \{x, y\}z + y\{x, z\}; \{f(q_i, p_i), p_j\} = \frac{\partial f}{\partial q_i}; \{f(q_i, p_i), q_j\} = -\frac{\partial f}{\partial p_j}$
symplektische Normalform	Wenn H keine Zeitabhängigkeit hat: $\frac{d}{dt} f(q_i, p_i) = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \stackrel{(2)}{=} \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = \{f, H\}$

Zwangsbedingungen

Problem	Die Legendre-Transformation beim Übergang von Lagrange zu Hamilton kann singular werden. Dies führt dann zu Zwangsbed. (ELGR) $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q_m(t), \dot{q}_m(t)) = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \right) = 0$ $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j = 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right] \ddot{q}_j = \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j \right]$ Das ist nur dann ein wohldefiniertes System von BWGL, wenn die Matrix $\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right]_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_1} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_1} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_n} \end{bmatrix}$ invertierbar ist.
Anzahl prim. Zwangsbed.	$N_{ZB} = \dim \left(\text{Kern} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) \right) = \dim \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) - \text{rang} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right)$
Primäre Zwangsbedingungen	Primäre Zwangsbedingungen: $\phi_i = p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$ für jedes verschwindende $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_i}$ Kanonische LGDR-Trafo: $H_{can}(q_i, p^i) = p^i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i)$ Totale LDR-Trafo: $H_{tot}(q_i, p^i, \lambda_i) = H_{can}(q_i, p^i) + \sum_{i=1}^{N_{ZB}} \lambda_i(q_i, p^i) \phi_i$ Konsistenzbed.: $\dot{\phi}_i = \{ \phi_i, H_{tot} \} \approx 0$ „schwach verschwindend“ $\Rightarrow$ ermittle $\lambda_i(q_i, p^i)$ durch Umformen von $\{ \phi_i, H_{tot} \} = 0$ Fünf Möglichkeiten: (1) Inkonsistenz (z.B. $1=0$) $\Rightarrow$ Theorie inkonsistent. (2) Tautologie (z.B. $0=0$) $\Rightarrow$ fertig. (3) Schwache Tautologie (z.B. $0 \approx 0$) $\Rightarrow$ fertig. (4) Bedingung erfüllbar, wenn λ_i bestimmte Werte annimmt $\Rightarrow$ fertig (5) Bedingung nicht erfüllbar $\Rightarrow$ sekundäre Zwangsbedingungen (oder Zwangsbedingungen höherer Ordnung) zur Ermittlung von $\lambda_i(q_i, p^i)$ notwendig, s.u.
Sekundäre Zwangsbed.	Wenn Konsistenzbedingung nicht erfüllbar, i.e. $\dot{\phi}_i = \{ \phi_i, H_{tot} \} \neq 0 \Rightarrow$ sekundäre Zwangsbedingung(en) ϕ_i^{sek} notwendig: $\phi_i^{sek} = \dot{\phi}_i$ Konsistenzbedingung $\dot{\phi}_i^{sek} = \{ \phi_i^{sek}, H_{tot} \} \approx 0$ „schwach verschwindend“ $\Rightarrow$ liefert, wenn erfüllbar, $\lambda_i(q_i, p^i)$
Zwangsbed. höhere Ord.	Wenn Konsistenzbedingung wieder nicht erfüllbar, solange fortsetzen, bis aus $\dot{\phi}_i^{(n)} = \{ \phi_i^{(n)}, H_{tot} \} \approx 0$ ein $\lambda_i(q_i, p^i)$ folgt, so dass Konsistenzbedingung $\{ \phi_i^{(n)}, H_{tot} \} \approx 0$ erfüllbar ist.
ZB 1., 2. Klasse	Wenn $\forall j: \{ \phi_i, \phi_j \} \approx 0 \Rightarrow \phi_i$ ist Zwangsbedingung erster Klasse. $\Rightarrow$ sonst: ϕ_i ist Zwangsbedingung zweiter Klasse
Phasenr. dim.	$D_{phys} = D_{tot} - 2N_{ZB}^{1st} - N_{ZB}^{2nd}$ mit $D_{phys} \dots$ Dim. phys. Phasenraum, $N_{ZB}^{1st} \dots$ # Zwangsbed. 1. Klasse, $N_{ZB}^{2nd} \dots$ # Zwangsbed. 2. Klasse
Eichsymmetrien	Jede Zwangsbedingung ϕ_i erster Klasse erzeugt eine Eichsymmetrie (Eichtransformation) $\delta_\epsilon f$ im totalen Phasenraum, wobei $\delta_\epsilon f = \epsilon \{ f, \phi_i \}$ mit beliebigem $f = f(q_i, p^i)$, weil $H_1^{tot} = H_{can} + \lambda_1 \phi$ dieselbe Zeitentwicklung im physikalischen Phasenraum generiert wie $H_2^{tot} = H_{can} + \lambda_2 \phi$, und es gilt: $f_1 - f_2 = \{ f, H_1^{tot} \} - \{ f, H_2^{tot} \} = \{ f, H_{can} + \lambda_1 \phi \} - \{ f, H_{can} + \lambda_2 \phi \}$ $f_1 - f_2 = \{ f, H_{can} \} + \{ f, \lambda_1 \phi \} - \{ f, H_{can} \} - \{ f, \lambda_2 \phi \} = \{ f, \lambda_1 \phi \} - \{ f, \lambda_2 \phi \} \Rightarrow [f_1 - f_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) \{ f, \phi \}]$ Eichfixierung: willkürliche Bedingung $B_k(q_i, p^i) = 0$ mit $k = 1 \dots N_{ZB}^{1st}$. Wandelt, wenn als Zwangsbedingung interpretiert, jede Zwangsbedingung 1. Klasse in zwei Zwangsbedingungen zweiter Klasse

Theoretische Physik: Algorithmus zur Modellbildung



Ungeladenes Punktteilchen

Teilchen ohne Ladung	Dimensionen: 1 (eine Zeitdimension, null Raumdimensionen - gemeint ist die Dimension des Integrals im Wirkungsfunktional) „Mechanische Feldtheorie“. Symmetrien: SRT → Poincaré-Invarianz.
Wirkung, Lagrange	$S = \int_{s_1}^{s_2} m_0 ds \left ds = \sqrt{dt^2 - d\vec{x}^2} \Rightarrow S = -m_0 \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{dt^2 - d\vec{x}^2} \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow S = -m_0 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\vec{x}}{d\tau}\right)^2} d\tau$
	$S = \int_{s_1}^{s_2} m_0 ds \left ds = \sqrt{dx^\mu dx_\mu} \Rightarrow S = -m_0 \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{dx^\mu dx_\mu} \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow S = -m_0 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\frac{dx^\mu dx_\mu}{d\tau^2}} d\tau = -m_0 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{u^\mu u_\mu} d\tau$
	$S = \int_{s_1}^{s_2} m_0 ds \left ds = \sqrt{dt^2 - d\vec{x}^2} \Rightarrow S = -m_0 \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{dt^2 - d\vec{x}^2} \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow S = -m_0 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2} dt$
	$S = -m_0 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2} dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} L dt \Rightarrow \boxed{L = -m_0 \sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2}} \dots (1)$ $L \approx \underbrace{-m_0}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{m_0 \frac{\dot{\vec{x}}^2}{2}}_{\text{kin.Energie}} + \underbrace{O(\dot{\vec{x}}^4)}_{\text{rel. Korrektur}}$
Hamilton	$H = p_i \dot{x}_i - L \dots (2) \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{m_0 \dot{x}_i}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2}} \dots (3) \Rightarrow \sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2} = \frac{m_0 \dot{x}_i}{p_i} \Rightarrow 1 - \dot{\vec{x}}^2 = \frac{m_0^2 \dot{x}_i^2}{p_i^2} \Rightarrow p^2 - \dot{\vec{x}}^2 p^2 = m_0^2 \dot{\vec{x}}^2 \Rightarrow$
	$m_0^2 \dot{\vec{x}}^2 + \dot{\vec{x}}^2 p^2 = p^2 \Rightarrow \dot{\vec{x}}^2 (m_0^2 + p^2) = p^2 \Rightarrow \dot{\vec{x}}^2 = \frac{p^2}{m_0^2 + p^2} \Rightarrow 1 - \dot{\vec{x}}^2 = 1 - \frac{p^2}{m_0^2 + p^2} = \frac{m_0^2 + p^2 - p^2}{m_0^2 + p^2} \Rightarrow 1 - \dot{\vec{x}}^2 = \frac{m_0^2}{m_0^2 + p^2} \dots (4)$
	$(3) \text{ in } (2) \Rightarrow H = \frac{m_0 \dot{\vec{x}}^2}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2}} - L \stackrel{(1)}{\Rightarrow} H = \frac{m_0 \dot{\vec{x}}^2}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2}} + m_0 \sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2} = m_0 \left(\frac{\dot{\vec{x}}^2}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2}} + \frac{1 - \dot{\vec{x}}^2}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2}} \right) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2}} \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \boxed{H = \sqrt{m_0^2 + p^2}}$

Geladenes Punktteilchen

Lagrange	EM-Feld wird durch 4er-Potential beschrieben. $L(x^\mu, u^\mu) = -m_0 \sqrt{u^\mu u_\mu} + \Delta L(x^\mu, u^\mu, A^\mu) \dots (1)$ Symmetrien: $\Delta L \dots$ relativistisch invariant (Poincaré-invariant). Annahme: ΔL linear in $A^\mu \Rightarrow$ Ansatz: $\Delta L = A_\mu (-q(u^\mu u_\mu, u^\mu x_\mu, x^\mu x_\mu) u^\mu - r(u^\mu u_\mu, u^\mu x_\mu, x^\mu x_\mu) x^\mu) \dots (2)$ Aber: x^μ problematisch, da kein Term mit x^μ Poincaré-invariant $\Rightarrow r = 0, \Delta L = q(u^\mu u_\mu) = q_0 = \text{const. (Annahme)} (2)$ $\Delta L = -q_0 u^\mu A_\mu \xrightarrow{(1)} L = -m_0 \sqrt{u^\mu u_\mu} - q_0 u^\mu A_\mu$
Euler-Lagrange-Gleichung	$\frac{\partial L}{\partial x^\nu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial u^\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\nu (-m_0 \sqrt{u^\mu u_\mu} - q_0 u^\mu A_\mu) - \frac{d}{d\tau} (-m_0 \sqrt{u^\mu u_\mu} - q_0 u^\mu A_\mu) = 0 \Rightarrow$ $-q_0 u^\mu \partial_\nu A_\mu - \frac{d}{d\tau} \left(-m_0 \left(\frac{1}{2} \frac{u_\nu}{\sqrt{u^\mu u_\mu}} + \frac{1}{2} \frac{u_\nu}{\sqrt{u^\mu u_\mu}} \right) - q_0 A_\nu \right) = 0 \mid u^\mu u_\mu \stackrel{\text{def}}{=} 1 \Rightarrow -q_0 u^\mu \partial_\nu A_\mu + \frac{d}{d\tau} (m_0 u_\nu + q_0 A_\nu) = 0 \Rightarrow$ $-q_0 u^\mu \partial_\nu A_\mu + m_0 \frac{du_\nu}{d\tau} + q_0 \frac{dA_\nu}{d\tau} = 0 \Rightarrow -q_0 u^\mu \partial_\nu A_\mu + m_0 \frac{du_\nu}{d\tau} + q_0 \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0 \Rightarrow -q_0 u^\mu \partial_\nu A_\mu + m_0 \frac{du_\nu}{d\tau} + q_0 \partial_\mu A_\nu u^\mu = 0 \Rightarrow$ $-m_0 \frac{du_\nu}{d\tau} = -q_0 u^\mu \partial_\nu A_\mu + q_0 \partial_\mu A_\nu u^\mu \Rightarrow -m_0 \frac{du_\nu}{d\tau} = q_0 u^\mu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \Rightarrow$ $\boxed{-m_0 \frac{du_\nu}{d\tau} = q_0 u^\mu F_{\mu\nu}}$ BWGL ist eichinvariant $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ <i>Beschl. Lorentzkraft</i>

Maxwell-Wirkung (Vakuum)

Annahmen	(1) Feldtheorie in D Raumzeitdimensionen (i.A. $D = 4$). (2) Feldinhalt: Vektorpotential A_μ. (3) Symmetrien: Poincaré-Invarianz. (4) Eichinvarianz $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ (mit Λ skalar $\rightarrow$ invar. unter abelscher Eichgruppe); charakterisiert WW (hier: Photon masselos) (5) Höchstens zweite Ableitung in den BWGL (selbst wenn die „richtige“ Theorie höhere Ableitungen benötigte, wären diese bei niedrigen Energien irrelevant)
Wirkung	(1) $S_{vac} = \int L d^D x$ (2) $S_{vac}[A_\mu] = \int L(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) d^D x$ (3) L relativistisch invariant $\rightarrow L$ (pseudo)skalar. (1)-(3) $L = a_0 A_\mu A^\mu + a_1 (A_\mu A^\mu)^2 + a_3 \partial_\mu A^\mu + a_4 (\partial_\mu A^\mu)^2 + a_5 (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \dots$ (4) $L = L(F_{\mu\nu}, \partial_\lambda F_{\mu\nu})$ mit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu}$ $F_{\mu\nu}$ ist eichinvariant: $F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \Lambda) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \Lambda) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \underbrace{\partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda}_{=0} = F_{\mu\nu}$ (1)-(4) $L = \alpha F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \beta F_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_\beta{}^\mu + \dots$ In $D = 4$ außerdem möglich: $\dots + \Theta \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$ (5) In $F_{\mu\nu}$ steckt bereits eine Ableitung! $\Rightarrow \boxed{D > 4: L = \alpha F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}} \quad D = 4: L = \alpha F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \Theta \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$ <i>totale Ableitung</i>
Ergebnis	$S_{vac}[A_\mu] = -\frac{1}{16\pi} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^D x$ (Faktor $= -\frac{1}{16\pi}$ „Konvention“) $\Rightarrow$ Lagrangedichte: $\boxed{L = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}$

Maxwell-Gleichungen mit Quellen

Kein Vakuum	Quellen hinzufügen! Poincaré-invariant, Eichinvariant (modulo Randterme). Annahme: Linearität in den Quellen j^μ
Lagrange	Einziger „Kandidat“: $L = a_0 j^\mu A_\mu$ Problem: Keine Eichinvarianz unter $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$?
Eichinvarianz	$S_j = \int L d^D x = a_0 \int j^\mu A_\mu d^D x \mid A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda \Rightarrow S' = a_0 \int j^\mu (A_\mu + \partial_\mu \Lambda) d^D x$ $S'_j = a_0 \int j^\mu A_\mu d^D x + a_0 \int j^\mu \partial_\mu \Lambda d^D x \mid j^\mu \partial_\mu \Lambda = \partial_\mu (j^\mu \Lambda) = \partial_\mu (j^\mu \Lambda) - \partial_\mu (j^\mu \Lambda)$ $S'_j = a_0 \int j^\mu A_\mu d^D x + a_0 \int \partial_\mu (j^\mu \Lambda) d^D x - a_0 \int \partial_\mu (j^\mu \Lambda) d^D x \Rightarrow$ Kontinuitätsgl. $\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$ muss gelten, damit eichinvariant! <i>Randterm. Ann.=0 soll verschwinden</i>
Wirkung	Wähle $a_0 = -1 \Rightarrow S = S_{vac} + S_j \Rightarrow S = -\frac{1}{16\pi} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^D x - \int j^\mu A_\mu d^D x \Rightarrow$ Lagrangedichte: $\boxed{L = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu}$
Feldstärketensor (kontravariant)	$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & B_y \\ +E_y & B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$
Feldstärketensor (kovariant)	$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\sigma} F^{\sigma\tau} \eta_{\tau\nu} = -F_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & +E_x & +E_y & +E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$
Hodge (dual) Feldstärketensor (kontravariant)	$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau} = \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ +B_x & 0 & E_z & -E_y \\ +B_y & -E_z & 0 & E_x \\ +B_z & E_y & -E_x & 0 \end{bmatrix}$
Hodge (dual) Feldstärketensor (kovariant)	$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} F^{\sigma\tau} = \begin{bmatrix} 0 & +B_x & +B_y & +B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{bmatrix}$
Lorentz invariant	$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$ Pseudoskalar: $F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} F^{\mu\nu} F^{\sigma\tau} = -4\vec{E} \cdot \vec{B} \Rightarrow \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} = -8\vec{E} \cdot \vec{B}$
Elektrischer Ant.:	$E^\mu = u_\nu F^{\nu\mu}; E_\mu = u^\nu F_{\nu\mu}$
Magnetischer Anteil:	$B^\mu = u_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} u_\nu \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau}; B_\mu = u^\nu \tilde{F}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} u_\nu \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} F^{\sigma\tau}$
Herleitung inhomogene Maxwell-Gleichungen	$S = \int L d^D x = \int \left[-\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \right] d^D x \Rightarrow \delta S = \int \left[-\frac{1}{16\pi} (\delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) - j^\mu \delta A_\mu \right] d^D x$ $\delta S = \int \left[-\frac{1}{16\pi} (\delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}) - j^\mu \delta A_\mu \right] d^D x = \int \left[-\frac{1}{16\pi} (\delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}) - j^\mu \delta A_\mu \right] d^D x$ $\delta S = \int \left[-\frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} - j^\mu \delta A_\mu \right] d^D x \mid F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = F^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu - F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu$ $\delta S = \int \left[-\frac{1}{8\pi} (F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu - F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu) - j^\mu \delta A_\mu \right] d^D x \mid -F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu \stackrel{\mu \leftrightarrow \nu}{=} -F^{\nu\mu} \partial_\mu \delta A_\nu = +F^{\nu\mu} \partial_\mu \delta A_\nu$ $\delta S = \int \left[-\frac{1}{8\pi} (F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu + F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu) - j^\mu \delta A_\mu \right] d^D x$ $\delta S = \int \left[-\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu - j^\mu \delta A_\mu \right] d^D x \mid F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu = \partial_\mu (F^{\mu\nu} \delta A_\nu) - \partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu$ $\delta S = \int \left[-\frac{1}{4\pi} \partial_\mu (F^{\mu\nu} \delta A_\nu) + \frac{1}{4\pi} \partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu - j^\mu \delta A_\mu \right] d^D x = \int \left(\frac{1}{4\pi} \partial_\mu F^{\mu\nu} - j^\nu \right) \delta A_\nu d^D x - \frac{1}{4\pi} \int \partial_\mu (F^{\mu\nu} \delta A_\nu) d^D x$ <i>Randterm. Ann.=0</i> $\delta S = \int \left(\frac{1}{4\pi} \partial_\mu F^{\mu\nu} - j^\nu \right) \delta A_\nu d^D x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{1}{4\pi} \partial_\mu F^{\mu\nu} - j^\nu = 0 \Rightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu}$ (Gauss und Ampere)
Homogene Maxwell-Gleichungen	$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0$ (Faraday und Induktionsgesetz) $\Rightarrow$ erfüllt wegen $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ Beweis: $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = 0 \Rightarrow \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta - \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\beta A_\alpha = 0 \mid \alpha \leftrightarrow \beta \Rightarrow$ $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta - \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta = 0 \Rightarrow \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta (\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} - \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha}) = 0 \Rightarrow \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta (\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} + \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}) = 0 \Rightarrow$ $2\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta = 0 \Rightarrow \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta = 0 \dots$ w.A.: $+\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta = -\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta} \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta = -\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta} \partial_\alpha \partial_\nu A_\beta \stackrel{\alpha \leftrightarrow \nu}{=} -\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta$

Hamilton'sche Analyse der Vakuum-Maxwell-Gleichungen

	$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \Rightarrow$ $\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} \left(\underbrace{(\partial_0 A_0 - \partial_0 A_0)(\partial^0 A^0 - \partial^0 A^0)}_{\mu=0, \nu=0} + \underbrace{(\partial_0 A_0 - \partial_0 A_i)(\partial^0 A^0 - \partial^0 A^i)}_{\mu=0, \nu=i} + \underbrace{(\partial_0 A_i - \partial_0 A_0)(\partial^0 A^i - \partial^0 A^0)}_{\mu=i, \nu=0} + \underbrace{(\partial_0 A_i - \partial_0 A_j)(\partial^0 A^j - \partial^0 A^i)}_{\mu=i, \nu=j} \right)$ $\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} \left(0 + (\partial_0 A_i - \partial_i A_0)(\partial^0 A^i - \partial^i A^0) + (\partial_0 A_i - \partial_i A_0)(\partial^0 A^i - \partial^i A^0) + (\partial_i A_j - \partial_j A_i)(\partial^i A^j - \partial^j A^i) \right)$ $\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} \left(2(\partial_0 A_i - \partial_i A_0)(\partial^0 A^i - \partial^i A^0) + (\partial_i A_j - \partial_j A_i)(\partial^i A^j - \partial^j A^i) \right) \dots (1) \dots \text{Lagrangedichte}$
Impulse:	$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_i)} = \Pi^0 + \Pi^i \quad \boxed{\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = 0} \Rightarrow \text{primäre Zwangsbedingung (Anm: } \partial_0 A_\mu \text{ entspricht } \partial \dot{q})$
Kanon. Impulse	$\Pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_i)} = -\frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_i)} \left(2(\partial_0 A_i - \partial_i A_0)(\partial^0 A^i - \partial^i A^0) + (\partial_i A_j - \partial_j A_i)(\partial^i A^j - \partial^j A^i) \right)$ $\Pi^i = -\frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_i)} \left(2\partial_0 A_i \partial^0 A^i - 2\partial_0 A_i \partial^i A^0 - 2\partial_i A_0 \partial^0 A^i + 2\partial_i A_0 \partial^i A^0 + (\partial_i A_j - \partial_j A_i)(\partial^i A^j - \partial^j A^i) \right)$ $\Pi^i = -\frac{1}{16\pi} \left(2 \left(\frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_i)} \partial_0 A_i \partial^0 A^i + \partial_0 A_i \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_i)} \partial^0 A^i \right) - 2 \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_i)} \partial_0 A_i \partial^i A^0 - 2 \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_i)} \partial_i A_0 \partial^0 A^i \right)$ $\Pi^i = -\frac{1}{16\pi} (2(\partial^0 A^i + \partial^0 A^i) - 2\partial^i A^0 - 2\partial_i A_0)$ $\boxed{\Pi^i = -\frac{1}{4\pi}(\partial^0 A^i - \partial^i A^0)} \dots (2) \Rightarrow 4\pi \Pi^i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \Rightarrow \partial^0 A^i = \partial^i A^0 - 4\pi \Pi^i \Rightarrow \partial_0 A_i = \partial_i A_0 - 4\pi \Pi_i \dots (3)$
Kanonische und totale Hamiltondichte	$\mathcal{H}_{can} = \Pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L} \text{ (analog zu } \mathcal{H}_{can} = p^i \dot{q}_i - L)$ $\mathcal{H}_{can} = \Pi^\mu \partial_0 A_\mu + \frac{1}{16\pi} \left(2(\partial_0 A_i - \partial_i A_0)(\partial^0 A^i - \partial^i A^0) + (\partial_i A_j - \partial_j A_i)(\partial^i A^j - \partial^j A^i) \right)$ $\mathcal{H}_{can} = \Pi^\mu \partial_0 A_\mu + \frac{1}{8\pi} (\partial_0 A_i - \partial_i A_0)(\partial^0 A^i - \partial^i A^0) + \frac{1}{16\pi} (\partial_i A_j - \partial_j A_i)(\partial^i A^j - \partial^j A^i)$ $\mathcal{H}_{can} = \Pi^\mu \partial_0 A_\mu + \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi} (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) 4\pi \frac{1}{4\pi} (\partial^0 A^i - \partial^i A^0) + \frac{1}{16\pi} (\partial_i A_j - \partial_j A_i)(\partial^i A^j - \partial^j A^i) \xrightarrow{(2)}$ $\mathcal{H}_{can} = \Pi^\mu \partial_0 A_\mu + \frac{1}{2} \Pi_i 4\pi \Pi^i + \frac{1}{16\pi} F_{ij} F^{ij} = 2\pi \Pi^i \Pi_i + \Pi^\mu \partial_0 A_\mu + \frac{1}{16\pi} F_{ij} F^{ij}$ $\mathcal{H}_{can} = 2\pi \Pi^i \Pi_i + \Pi^0 \partial_0 A_0 + \Pi^i \partial_0 A_i + \frac{1}{16\pi} F_{ij} F^{ij} \Big \Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = 0 \text{ (primäre Zwangsbedingung)}$ $\mathcal{H}_{can} = 2\pi \Pi^i \Pi_i + \Pi^i \partial_0 A_i + \frac{1}{16\pi} F_{ij} F^{ij} \xrightarrow{(3)} 2\pi \Pi^i \Pi_i + \Pi^i (\partial_i A_0 - 4\pi \Pi_i) + \frac{1}{16\pi} F_{ij} F^{ij}$ $\mathcal{H}_{can} = 2\pi \Pi^i \Pi_i + \Pi^i \partial_i A_0 - 4\pi \Pi^i \Pi_i + \frac{1}{16\pi} F_{ij} F^{ij} \Big \Pi^i \partial_i A_0 = \partial_i (\Pi^i A_0) - A_0 \partial_i \Pi^i$ $\mathcal{H}_{can} = -2\pi \Pi^i \Pi_i + \partial_i (\Pi^i A_0) - A_0 \partial_i \Pi^i + \frac{1}{16\pi} F_{ij} F^{ij} \Big \text{Ann: } \partial_i (\Pi^i A_0) = 0 \text{ (Randterm)}$ $\boxed{\mathcal{H}_{can} = -2\pi \Pi^i \Pi_i - A_0 \partial_i \Pi^i + \frac{1}{16\pi} F_{ij} F^{ij} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)} \dots (4)$ $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_{can} + \lambda \Pi^0 = \lambda \Pi^0 - 2\pi \Pi^i \Pi_i - A_0 \partial_i \Pi^i + \frac{1}{16\pi} F_{ij} F^{ij} \dots (5)$
Sekundäre Zwangsbedingung	Konsistenzbed. für primäre Zwangsbedingung: $\dot{\Pi}^0 = \{ \Pi^0, \mathcal{H}_{tot} \} \approx 0 \xrightarrow{(5)} \{ \Pi^0, \lambda \Pi^0 - 2\pi \Pi^i \Pi_i - A_0 \partial_i \Pi^i + \frac{1}{16\pi} F_{ij} F^{ij} \} \approx 0$ $\lambda \{ \Pi^0, \Pi^0 \} - 2\pi \{ \Pi^0, \Pi^i \Pi_i \} - \{ \Pi^0, A_0 \} \partial_i \Pi^i + \frac{1}{16\pi} \{ \Pi^0, F_{ij} F^{ij} \} \approx 0 \Rightarrow \boxed{\partial_i \Pi^i \approx 0} \dots \text{"Gauss"-Zwangsbed., i.A. nicht erfüllt} \Rightarrow$ Sekundäre Zwangsbed.: $G = \dot{\Pi}^0 = \partial_i \Pi^i$. Konsistenzbed. für sekundäre Zwangsbedingung: $\dot{G} = \{ G, \mathcal{H}_{tot} \} \approx 0$ $\dot{G} = \{ \partial_k \Pi^k, \lambda \Pi^0 - 2\pi \Pi^i \Pi_i - A_0 \partial_i \Pi^i + \frac{1}{16\pi} F_{ij} F^{ij} \} = 0 \dots \text{erfüllt. Keine weiteren Zwangsbedingungen}$ $\{ \Pi^0, G \} = \{ \Pi^0, \partial_i \Pi^i \} = \partial_i \delta^{0i} = 0 \Rightarrow \boxed{\Pi^0, G \text{ sind Zwangsbedingungen erster Klasse!}}$
Freiheitsgrade γ-Polarisationen	Bei $D = 4$: $D_{phys} = D_{tot} - 2N_{ZB}^{1st} - N_{ZB}^{2nd} \Big D_{tot} = \dim(A_0, A_i, \Pi^0, \Pi^i) = 1 + 3 + 1 + 3 = 8 \Rightarrow D_{phys} = 8 - 2 \cdot 2 - 0 = 4$ Anzahl Photonenpolarisationen $= D_{phys} - 2 = 4 - 2 = 2$
Eichtrafo	Eichtrafo erzeugt durch Zwangsbed. G: $\delta_\epsilon f = \epsilon \{ f, G \} \dots (6)$, wähle $f = f(A_i, \Pi^i) = -A_i \xrightarrow{(6)} \delta_\epsilon f = \epsilon \{ -A_i, G \} = \epsilon \{ G, A_i \}$ $\delta_\epsilon A_i = \epsilon \{ \partial_k \Pi^k, A_i \} = \epsilon \frac{\partial}{\partial A_\mu} (\partial_k \Pi^k) \frac{\partial}{\partial \Pi^\mu} A_i = \epsilon \frac{\partial}{\partial \Pi^\mu} \partial_k \Pi^k \frac{\partial}{\partial \Pi^\mu} A_i = -\epsilon \frac{\partial}{\partial \Pi^i} \partial_k \Pi^k = -\epsilon \partial_k \frac{\partial}{\partial \Pi^i} \Pi^k = -\left(\partial_k \left(\epsilon \frac{\partial}{\partial \Pi^i} \Pi^k \right) - \partial_k \epsilon \frac{\partial}{\partial \Pi^i} \Pi^k \right)$ $\delta_\epsilon A_i = -\partial_k \left(\epsilon \frac{\partial}{\partial \Pi^i} \Pi^k \right) + \partial_k \epsilon \frac{\partial}{\partial \Pi^i} \Pi^k \Rightarrow \delta_\epsilon A_i = \partial_i \epsilon \Rightarrow \boxed{\delta_\epsilon A_\mu = \partial_\mu \epsilon}$ $\text{Randterm}=0 \quad \delta^{ik}$
Energie-Impuls-erhaltung	Die Poincaré-Transformation $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$ (Raumzeittranslation) führt zu 4er-Impulserhaltung (also Energie/Impulserhaltung) $A_\lambda(x^\sigma) \rightarrow A_\lambda(x^\sigma + \xi^\sigma) \approx A_\lambda(x^\sigma) + \xi^\nu \partial_\nu A_\lambda(x^\sigma) = A_\lambda(x^\sigma) + \delta A_\lambda(x^\sigma) \Rightarrow \delta A_\lambda(x^\sigma) = \xi^\nu \partial_\nu A_\lambda(x^\sigma) \dots (7)$ $\mathcal{L}(x^\sigma) \rightarrow \mathcal{L}(x^\sigma + \xi^\sigma) \approx \mathcal{L}(x^\sigma) + \xi^\nu \partial_\nu \mathcal{L}(x^\sigma) \Big \xi^\nu = \text{const.} \Rightarrow \xi^\nu \partial_\nu \mathcal{L} = \partial_\nu (\xi^\nu \mathcal{L})$ $\mathcal{L}(x^\sigma + \xi^\sigma) \approx \mathcal{L}(x^\sigma) + \partial_\nu (\xi^\nu \mathcal{L}(x^\sigma)) = \mathcal{L}(x^\sigma) + \delta \mathcal{L}(x^\sigma) \Rightarrow \delta \mathcal{L}(x^\sigma) = \partial_\nu (\xi^\nu \mathcal{L}(x^\sigma)) \Rightarrow K^\nu = \xi^\nu \mathcal{L}(x^\sigma) \dots (8)$ $j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\lambda)} \delta A_\lambda - K^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\lambda)} \delta A_\lambda - \xi^\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\lambda)} \xi^\nu \partial_\nu A_\lambda - \xi^\mu \mathcal{L} = \xi^\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\lambda)} \partial_\nu A_\lambda - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) \Big \text{vgl } j^\mu = \xi^\alpha T^\mu_\alpha \Rightarrow$ Energie-Impuls-Tensor: $T_{can}^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\lambda)} \partial_\nu A_\lambda - \xi^\alpha \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \Big \mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \Rightarrow T_{can}^\mu_\nu = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\lambda} \partial_\nu A_\lambda + \frac{1}{16\pi} \xi^\alpha \delta_\nu^\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \Rightarrow$ $T_{can}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\lambda} \partial^\nu A_\lambda + \frac{1}{16\pi} \xi^\alpha \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \dots (9)$ Problem: $T_{can}^{\mu\nu}$ soll symmetrisch sein, $F^{\mu\lambda} \partial^\nu A_\lambda$ ist i.A. nicht symmetrisch Freiheit: $T^{\mu\nu} = T_{can}^{\mu\nu} + \partial_\lambda t^{\mu\lambda\nu}$ mit $t^{\mu\lambda\nu}$ antisymmetrisch in $\mu\lambda$, wegen Noetherstromerhaltung: $\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T_{can}^{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\lambda t^{\mu\lambda\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu \partial_\lambda t^{\mu\lambda\nu} = 0 \Rightarrow \text{Fixiere } t^{\mu\lambda\nu} = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\lambda} A^\nu \Rightarrow \boxed{T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\lambda} F^{\nu\lambda} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)}$
Abelsch / nicht abelsch	Eichtrafo allgemein: $A_\mu \rightarrow g(\partial_\mu + A_\mu)g^{-1}$. Maxwell: $g \in U(1)$, abelsch. Nicht abelsch: Schwache WW: $g \in SU(2)$, starke WW: $g \in SU(3)$, GUT: $g \in SU(5)$
Höhere Spins	Spin 1 ... Vektorfeld mit Eichtrafo $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, Spin 2 ... Tensorfeld der Stufe 2 mit Eichtrafo $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$ (Einsteingravitation) Spin 3 ... Tensorfeld der Stufe 3 mit Eichtrafo $\eta_{\mu\nu\lambda} \rightarrow \eta_{\mu\nu\lambda} + \partial_\mu \zeta_{\nu\lambda}$

Geladene Materie

Lagrange-dichte	Bsp: Geladenes, komplexes Skalarfeld ϕ : $\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\nabla^\mu \phi) (\nabla_\mu \phi^*) - V(\phi^* \phi) \dots (1)$ <i>kinetischer Term</i>
Higgs-Potential	$V = -\frac{\mu^2}{2} \phi^* \phi + \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi)^2 \dots (2)$ mit Masseparameter $\mu \in \mathbb{R}$ und Selbstwechselwirkungsstärke $\lambda \in \mathbb{R}$
eichkovar Ableitg	$\nabla^\mu \phi = (\partial^\mu + iqA^\mu)\phi$; $\nabla_\mu \phi^* = (\partial_\mu - iqA_\mu)\phi^* \Rightarrow$ damit bleibt $\mathcal{L}$ unter Eichtransformation invariant (bis auf eine Phase)
Eichtrafo	$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda \Rightarrow$ führt zu lokaler Phasendrehung $\phi \rightarrow e^{-ig\Lambda(x^\mu)} \phi$ $\mathcal{L}$ auch invar bei globaler Phasendrehung $\phi \rightarrow e^{-ig\Lambda} \phi$
Euler-Lagrange-Bewegungs-gleichungen	Variation des Skalarfeldes: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi^*)} = 0 \Rightarrow \nabla^\mu \nabla_\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0 \dots (3)$ verallg. Klein-Gordon-Gleichung Variation des Eichfeldes: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4\pi} \partial_\nu F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \nabla^\mu \phi^* ig \phi - \frac{1}{2} ig \phi^* \nabla^\mu \phi = 0 \Rightarrow$ $-\frac{1}{4\pi} \partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} ig \phi^* \nabla^\mu \phi - \frac{1}{2} \nabla^\mu \phi^* ig \phi \Rightarrow \partial_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi \frac{ig}{2} (\phi^* \nabla^\mu \phi - \phi \nabla^\mu \phi^*) \Big \nu \leftrightarrow \mu \Rightarrow$ $\partial_\mu F^{\nu\mu} = 4\pi \frac{ig}{2} (\phi^* \nabla^\nu \phi - \phi \nabla^\nu \phi^*) \Big F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu} \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi \frac{ig}{2} (\phi \nabla^\nu \phi^* - \phi^* \nabla^\nu \phi) \Rightarrow$ $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu$ mit $j^\nu = \frac{ig}{2} (\phi \nabla^\nu \phi^* - \phi^* \nabla^\nu \phi) \dots (4)$ inhomogene Maxwell-Gleichung (Phase generiert Strom)
Vakuum-Lösung	$A_\mu = 0, \phi = v e^{i\eta}$ mit $v = \text{const.}, \eta = \text{const.}$. Wähle o. B. d. A. Phase $\eta = 0 \Rightarrow \phi = v \Rightarrow F_{\mu\nu} = 0, j_\mu = 0, \nabla_\mu \phi = 0$ $(3) \Rightarrow \nabla^\mu \nabla_\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0 \Big \nabla_\mu \phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0 \xrightarrow{(2)} -\frac{\mu^2}{2} \phi + \frac{\lambda}{4} \phi^* \phi^2 = 0 \Big \cdot \frac{2}{\phi} \Rightarrow -\mu^2 + \lambda \phi^* \phi = 0 \Big \phi = v \Rightarrow$ $-\mu^2 + \lambda v^2 = 0 \Rightarrow \mu^2 = \lambda v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \dots (4)$
Vakuum Fluktuationen	Wir betrachten Vakuumfluktuationen von ϕ , parametrisiert durch eine Fluktuation im Betrag $\rho(x^\mu)$ und in der Phase $\sigma(x^\mu)$: $\phi = (v + \rho) e^{i\sigma/v} \dots (5)$ sowie Fluktuationen im Eichfeld $A_\mu = 0 + A_\mu^{\text{flukt}} \dots (6) \Rightarrow$ $V = -\frac{\mu^2}{2} \phi^* \phi + \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi)^2 \Big \phi = (v + \rho) e^{i\sigma/v} \Rightarrow V = -\frac{\mu^2}{2} (v + \rho)^2 + \frac{\lambda}{4} (v + \rho)^4$ $V = -\frac{\mu^2}{2} (v^2 + 2v\rho + \rho^2) + \frac{\lambda}{4} (v^2 + 2v\rho + \rho^2)(v^2 + 2v\rho + \rho^2) \xrightarrow{(4)} \Rightarrow$ $V = -\frac{\mu^2}{2} \left(\frac{\mu^2}{\lambda} + 2v\rho + \rho^2 \right) + \frac{\lambda}{4} \left(\frac{\mu^2}{\lambda} + 2v\rho + \rho^2 \right) \left(\frac{\mu^2}{\lambda} + 2v\rho + \rho^2 \right)$ $V = -\frac{\mu^4}{2\lambda} - \mu^2 v \rho - \frac{\mu^2 \rho^2}{2} + \frac{\lambda}{4} \left(\frac{\mu^4}{\lambda^2} + \frac{2\mu^2 v \rho}{\lambda} + \frac{\mu^2 \rho^2}{\lambda} + 2 \frac{\mu^2 v \rho}{\lambda} + 4v^2 \rho^2 + 2v\rho^3 + \frac{\mu^2 \rho^2}{\lambda} + 2v\rho^3 + \rho^4 \right)$ $V = -\frac{\mu^4}{2\lambda} - \mu^2 v \rho - \frac{\mu^2 \rho^2}{2} + \frac{\lambda}{4} \left(\frac{\mu^4}{\lambda^2} + \frac{4\mu^2 v \rho}{\lambda} + \frac{2\mu^2 \rho^2}{\lambda} + 4v^2 \rho^2 + 4v\rho^3 + \rho^4 \right)$ $V = -\frac{\mu^4}{2\lambda} - \mu^2 v \rho - \frac{\mu^2 \rho^2}{2} + \frac{\mu^4}{4\lambda} + \mu^2 v \rho + \frac{\mu^2 \rho^2}{2} + \lambda v^2 \rho^2 + \lambda v \rho^3 + \frac{\lambda \rho^4}{4} = -\frac{\mu^4}{4\lambda} + \lambda v^2 \rho^2 + \lambda v \rho^3 + \frac{\lambda \rho^4}{4} \xrightarrow{(4)} \Rightarrow$ $V = -\frac{\mu^4}{4\lambda} + \mu^2 \rho^2 + \mu \sqrt{\lambda} \rho^3 + \frac{\lambda}{4} \rho^4 \dots (7)$ Das Potential ist unabhängig von den Phasenfluktuationen σ , deshalb ist die Phasenfluktuation, auch bekannt als Nambu-Goldstone-Boson, masselos (Beispiel für Goldstone-Theorem)
Spontane Symmetriebrechung	Wir betrachten den kinetischen Term $\frac{1}{2} (\nabla^\mu \phi) (\nabla_\mu \phi^*)$ aus der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ und setzen die Ansatz (5) für die Betragsfluktuationen ρ und Phasenfluktuationen σ ein. Wir erhalten: $\frac{1}{2} (\nabla^\mu \phi) (\nabla_\mu \phi^*) = \frac{1}{2} (\partial^\mu \rho) (\partial_\mu \rho) + \frac{1}{2} (g v A_\mu + \partial_\mu \sigma)^2 \left(1 + \frac{\rho^2}{v^2} \right)$. Der erste Term ist ein „gewöhnlicher kinetischer Term“ für die Betragsfunktion ρ . Der zweite Term ist ungewöhnlich. Wir definieren ein eichtransformiertes Eichfeld $\tilde{A}_\mu = A_\mu + \frac{1}{gv} \partial_\mu \sigma$ und erhalten statt dem letzten Term den Ausdruck $\frac{g^2 v^2}{2} \tilde{A}^\mu \tilde{A}_\mu \left(1 + \frac{\rho^2}{v^2} \right)^2$. In quadratischer Ordnung ist dies ein Masseterm für das Eichfeld mit einer Masse $M = gv$. Das heißt: Das masselose Nambu-Goldstone-Boson σ kommt nach der Eichtransformation $\tilde{A}_\mu$ in der Wirkung nicht mehr vor. Wir sagen: „Das Eichfeld $\tilde{A}_\mu$ hat das Nambu-Goldstone-Boson gegessen und ist massiv“. • Vor der Symmetriebrechung: ein komplexes Skalarfeld ϕ mit 2 Freiheitsgraden (ρ, v) und ein abelsches Eichfeld A_μ (2 Freiheitsgrade), macht insgesamt 4 Freiheitsgrade • Nach der Symmetriebrechung: ein reelles Skalarfeld ρ mit 1 Freiheitsgrad, und ein massives Eichfeld $\tilde{A}_\mu$ mit drei Freiheitsgraden (hat zusätzlich longitudinale Polarisation) • Mikroskopisch: $\phi \sim \langle e^- e^- \rangle_{\text{cooper}}$
Meissner-Effekt und London-Endringtiefe	Das Eichfeld $A_\mu = 0$ für die Vakuumlösung, daher ist das transformierte Eichfeld $\tilde{A}_\mu = A_\mu + \frac{1}{gv} \partial_\mu \sigma$ reine Eichung, weshalb im Inneren des Supraleiters kein Magnetfeld existiert (Meissner-Effekt). Ergibt sich auch aus Energiedichte $\mathcal{H}$ des massiven Maxwellfeldes $\tilde{A}_\mu$: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \frac{M^2}{2} \tilde{A}^\mu \tilde{A}_\mu$ wobei $\mathcal{H}_0 \propto E^2 + B^2 \Rightarrow$ Ein konstantes Magnetfeld würde zu einem linear ansteigenden $\tilde{A}^\mu$ führen, was durch den Masseterm $\frac{M^2}{2} \tilde{A}^\mu \tilde{A}_\mu$ zu enormen Energiedichten führen würde $\Rightarrow$ Daher sind Magnetfelder in Supraleitern stark unterdrückt. Lösungen der Wellengleichung $(\partial^2 + m^2) \tilde{A}_\mu = 0$ für massive Photonen $m^2 = 4\pi M^2$ führe zu Yukawa-Potential mit charakteristischer Längenskala $1/m$ (London-Endringtiefe).

Makroskopische Elektrodynamik in Materie

Einführung makroskopischer Felder durch Mittelung			
Feldstärketensor	$D^{\mu\nu} = -D^{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ +D_x & 0 & -H_z & H_y \\ +D_y & H_z & 0 & -H_x \\ +D_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix}$	Polarisationsfeld-tensor	$P^{\mu\nu} = -P^{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & -P_x & -P_y & -P_z \\ +P_x & 0 & M_z & -M_y \\ +P_y & -M_z & 0 & M_x \\ +P_z & M_y & -M_x & 0 \end{bmatrix}$ $\vec{P}$...Polarisation $\vec{M}$...Magnetisierung $D^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + 4\pi P^{\mu\nu}$
Phän.Maxwellgl.	$\partial_\mu D^{\mu\nu} = 4\pi j_{frei}^\nu$ (inhomogene Maxwellgl.) $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu F_\alpha = 0$ (homogene Maxwellgl.)		
Unipolarindukt.	$\vec{P} = \vec{v} \times \vec{M}_{ruhe} + \vec{P}_{ruhe} \Rightarrow \vec{P} \neq 0$ möglich, auch wenn $\vec{P}_{ruhe} = 0$.		
E-Imp. Tensor	$T_{Mat}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(D^\mu_\sigma F^{\sigma\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} D_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)$	Freie Kräfte:	$f_{frei}^\mu = -\partial_\nu T_{Mat}^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} j_{frei}^\nu$
phänomeno-logische Mate-rialgleichungen	(für bewegte lineare Materie) Materie liefert ausgezeichnetes Bezugssystem (Ruhesystem des Mediums). In diesem Ruhesystem gilt: $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$. In einem allgemeinen Bezugssystem gilt, in dem sich die Materie mit u^μ bewegt, gilt: $D^{\mu\nu} u_\nu = \varepsilon F^{\mu\nu} u_\nu$ mit ε ...Dielektrizitätskonstante. $\tilde{F}^{\mu\nu} u_\nu = \mu \tilde{D}^{\mu\nu} u_\nu$ mit μ ... Suzeptibilität		
Ohmsches Gesetz	Nicht Kovariant (nicht-relativistisch): $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ mit $\vec{j}$... Konvektionsstrom. 4er-Konvektionsstrom $j_K^\mu = u^\mu \rho_{ruhe}$ mit ρ_{ruhe} ... Ladungsdichte. Es gilt: $u_\mu j_K^\mu = \rho_{ruhe}$ 4er-Leitungsstrom: $j_L^\mu = \sigma F^{\mu\nu} u_\nu$. Es gilt: $u_\mu j_L^\mu = 0$. Freier Strom: $j_{frei}^\mu = j_L^\mu + j_K^\mu$		

Abstrahlung (Retardierte Green-Funktion)

Inhom. Maxwellgl. in Lorenz-Eichung	Inhomogene Maxwell-Gleichung: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu \dots (1)$. Lorenzeichung: $\partial_\mu A^\mu = 0 \dots (2)$ $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \Rightarrow \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 4\pi j^\nu \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 4\pi j^\nu \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 4\pi j^\nu \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 4\pi j^\nu \mid \nu \rightarrow \mu \Rightarrow \square A^\mu = 4\pi j^\mu \dots$ inhomogene Maxwellgleichung in Lorenz-Eichung
Lsg mit Green-Fkt	Suche Green-Fkt. $G(x^\mu, x'^\mu)$, so dass $\square G(x^\mu, x'^\mu) = 4\pi \delta^{(4)}(x^\mu - x'^\mu)$. Dann ist $A^\mu(x^\nu) = \int_{4D} G(x^\nu, x'^\nu) j^\mu(x'^\nu) d^4 x'$ $\square G(x^\mu, x'^\mu) = 4\pi \delta^{(4)}(x^\mu - x'^\mu) \mid \text{Ann.: } G(x^\mu, x'^\mu) = G(x^\mu - x'^\mu) = G(y^\mu) \text{ (zulässig, weil } x^\mu - x'^\mu \text{ invariant gegen Trafo } x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu)$ $\square G(y^\mu) = 4\pi \delta^{(4)}(x^\mu - x'^\mu) \mid G(y^\mu) \stackrel{\text{Fourier}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{4D} \tilde{G}(k^\mu) e^{-ik^\mu y_\mu} d^4 k$ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \square \int_{4D} \tilde{G}(k^\mu) e^{-ik^\mu y_\mu} d^4 k = 4\pi \delta^{(4)}(x^\mu - x'^\mu)$ $\frac{1}{4\pi^2} \int_{4D} \tilde{G}(k^\mu) \square e^{-ik^\mu y_\mu} d^4 k = 4\pi \delta^{(4)}(x^\mu - x'^\mu) \mid \square e^{-ik^\mu y_\mu} = -k_\nu k^\nu e^{-ik^\mu y_\mu}$ $\frac{1}{4\pi^2} \int_{4D} \tilde{G}(k^\mu) (-k_\nu k^\nu) e^{-ik^\mu y_\mu} d^4 k = 4\pi \delta^{(4)}(x^\mu - x'^\mu) \mid \delta^{(4)}(x^\mu - x'^\mu) \stackrel{\text{Fourier}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{4D} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik^\mu y_\mu} d^4 k = \frac{1}{16\pi^4} \int_{4D} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik^\mu y_\mu} d^4 k$ $\frac{1}{4\pi^2} \int_{4D} \tilde{G}(k^\mu) (-k_\nu k^\nu) e^{-ik^\mu y_\mu} d^4 k = 4\pi \frac{1}{16\pi^4} \int_{4D} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik^\mu y_\mu} d^4 k$ $\frac{1}{4\pi^2} \int_{4D} \tilde{G}(k^\mu) (-k_\nu k^\nu) e^{-ik^\mu y_\mu} d^4 k = 4\pi \frac{1}{16\pi^4} \int_{4D} e^{-ik^\mu y_\mu} d^4 k \mid \cdot 4\pi^2$ $\int_{4D} \tilde{G}(k^\mu) (-k_\nu k^\nu) e^{-ik^\mu y_\mu} d^4 k = \frac{16\pi^3}{16\pi^4} \int_{4D} e^{-ik^\mu y_\mu} d^4 k$ $\int_{4D} \tilde{G}(k^\mu) (-k_\nu k^\nu) e^{-ik^\mu y_\mu} d^4 k = \int_{4D} \frac{1}{\pi} e^{-ik^\mu y_\mu} d^4 k \mid \text{Stimmt nur, wenn Integranden gleich sind}$ $\tilde{G}(k^\mu) (-k_\nu k^\nu) e^{-ik^\mu y_\mu} = \frac{1}{\pi} e^{-ik^\mu y_\mu}$ $\tilde{G}(k^\mu) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{k_\nu k^\nu} \dots (1)$ Fouriertransformierte Greenfunktion, enthält Pole. Wahl des Hilfswegs bei Rücktransformation bestimmt Lösung. $\tilde{G}(\vec{k}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\omega^2 - \vec{k}^2} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{k^2 - \omega^2}$ $G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{1}{\pi} \frac{1}{k^2 - \omega^2} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} e^{-i\omega(t - t')} d\omega d^3 k$ $G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = \frac{1}{4\pi^3} \int \frac{1}{k^2 - \omega^2} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} e^{-i\omega(t - t')} d\omega d^3 k \mid \vec{R} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} - \vec{r}'; \tau \stackrel{\text{def}}{=} t - t'$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{4\pi^3} \int \frac{1}{k^2 - \omega^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} e^{-i\omega\tau} d\omega d^3 k \mid \text{wähle } z - \text{Achse Richtung } \vec{R} \Rightarrow \vec{R} = \hat{e}_z R$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{4\pi^3} \int \frac{1}{k^2 - \omega^2} e^{i\vec{k} \cdot \hat{e}_z R} e^{-i\omega\tau} d\omega d^3 k \mid \vec{k} \cdot \hat{e}_z = k \cos \vartheta$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{4\pi^3} \int \frac{1}{k^2 - \omega^2} e^{ikR \cos \vartheta} e^{-i\omega\tau} d\omega d^3 k \mid d^3 k \text{ mit Kugelkoordinaten } k, \vartheta, \varphi \text{ (weil } k = \vec{k} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \text{Radius})$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{4\pi^3} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{k=0}^{\infty} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \omega^2} e^{ikR \cos \vartheta} e^{-i\omega\tau} d\omega k^2 \sin \vartheta dk d\varphi d\vartheta \mid u = \cos \vartheta; du = -\sin \vartheta; u_- = \cos 0 = 1; u^+ = \cos \pi = -1$ $G(\vec{R}, \tau) = -\frac{1}{4\pi^3} \int_{u=1}^{-1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{k=0}^{\infty} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \omega^2} e^{ikRu} e^{-i\omega\tau} d\omega k^2 dk d\varphi du$ $G(\vec{R}, \tau) = +\frac{1}{4\pi^3} \int_{u=-1}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{k=0}^{\infty} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \omega^2} e^{ikRu} e^{-i\omega\tau} d\omega k^2 dk d\varphi du$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{4\pi^3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{k=0}^{\infty} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \omega^2} \left[\frac{1}{ikR} e^{ikRu} \right]_{u=-1}^1 e^{-i\omega\tau} d\omega k^2 dk d\varphi$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{4\pi^3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{k=0}^{\infty} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \omega^2} (e^{ikR} - e^{-ikR}) e^{-i\omega\tau} d\omega \frac{1}{k} k^2 dR d\varphi \mid \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{k=0}^{\infty} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \omega^2} (e^{ikR} - e^{-ikR}) e^{-i\omega\tau} d\omega k dk$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{k=0}^{\infty} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} k (e^{ikR} - e^{-ikR}) \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \omega^2} dk d\omega \dots (2)$... ω-Integral mit Residuensatz: Für $t > t' \Rightarrow \tau = t - t' > 0$ (retardierte Potential) Integration um den <u>unteren Halbkreis</u>. Begründung: $e^{-i\omega\tau} = e^{-i\text{Re}(\omega)\tau} e^{i\text{Im}(\omega)\tau} \Rightarrow e^{i\text{Im}(\omega)\tau}$ darf nicht divergieren $\Rightarrow \text{Im}(\omega) \tau$ muss kleiner 0 sein $\Rightarrow da \tau > 0$ muss $\text{Im}(\omega) \rightarrow -\infty$ gehen. Retardiert bedeutet außerdem: Umgehung der Polstellen „oben“ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \omega^2} d\omega = -2i\pi \left((\omega + kc) \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \omega^2} \Big _{\omega \rightarrow -k} + (\omega - kc) \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \omega^2} \Big _{\omega \rightarrow k} \right)$ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \omega^2} d\omega = -2i\pi \left((\omega + kc) \frac{e^{-i\omega\tau}}{(k+\omega)(k-\omega)} \Big _{\omega \rightarrow -k} + (\omega - kc) \frac{e^{-i\omega\tau}}{(k+\omega)(k-\omega)} \Big _{\omega \rightarrow k} \right)$ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \omega^2} d\omega = -2i\pi \left(\frac{e^{-i\omega\tau}}{k-\omega} \Big _{\omega \rightarrow -k} - \frac{e^{-i\omega\tau}}{k+\omega} \Big _{\omega \rightarrow k} \right) = -2i\pi \left(\frac{e^{ik\tau}}{2k} - \frac{e^{-ik\tau}}{2k} \right) = \frac{i\pi}{k} (e^{-ik\tau} - e^{ik\tau}) \stackrel{(2)}{=} \frac{i\pi}{k} (e^{-ik\tau} - e^{ik\tau})$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{\infty} (e^{ikR} - e^{-ikR}) (e^{-ik\tau} - e^{ik\tau}) dk = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{\infty} (e^{ikR} e^{-ik\tau} - e^{ikR} e^{ik\tau} - e^{-ikR} e^{-ik\tau} + e^{-ikR} e^{ik\tau}) dk$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{\infty} (e^{ik(R-\tau)} - e^{ik(R+\tau)} - e^{-ik(R-\tau)} + e^{-ik(R+\tau)}) dk = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{\infty} (e^{ik(R-\tau)} - e^{ik(R+\tau)} - e^{-ik(R-\tau)} + e^{-ik(R+\tau)}) dk$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{\infty} (e^{ik(R-\tau)} - e^{-ik(R+\tau)}) dk - \frac{1}{2\pi R} \int_0^{\infty} (e^{ik(R+\tau)} - e^{-ik(R-\tau)}) dk$ $k = -u; dk = -du; u^+ = -k^+ = -\infty; u_- = 0$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{\infty} (e^{ik(R-\tau)} - e^{-ik(R+\tau)}) dk + \frac{1}{2\pi R} \int_0^{\infty} (e^{-iu(R+\tau)} - e^{iu(R-\tau)}) du \mid - \int_0^{\infty} (a-b) du = + \int_{-\infty}^0 (a-b) du = - \int_{-\infty}^0 (b-a) du$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{\infty} (e^{ik(R-\tau)} - e^{-ik(R+\tau)}) dk + \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^0 (e^{iu(R-\tau)} - e^{-iu(R+\tau)}) du \mid u \rightarrow k$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{\infty} (e^{ik(R-\tau)} - e^{-ik(R+\tau)}) dk + \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^0 (e^{ik(R-\tau)} - e^{-ik(R+\tau)}) dk$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ik(R-\tau)} - e^{-ik(R+\tau)}) dk$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ik(R-\tau)} - e^{ik(-R-\tau)}) dk \mid (R-\tau) \stackrel{\text{def}}{=} x_1; (-R-\tau) \stackrel{\text{def}}{=} x_2$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iKx_1} dK - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iKx_2} dK \right) = \frac{1}{R} (\delta(x_1) - \delta(x_2)) = \frac{1}{R} (\delta(-x_1) - \delta(-x_2))$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{\delta(\tau-R) - \delta(\tau+R)}{R} \mid \tau + R = t - t' + R \text{ wird für } t > t' \text{ niemals 0}$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{\delta(\tau-R)}{R} \mid \vec{R} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} - \vec{r}' \Rightarrow R = \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' ; \tau \stackrel{\text{def}}{=} t - t'$ $G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = \frac{\delta(t-t' - \vec{r} - \vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' } \Rightarrow \text{Retardierte 4-er-Potential: } A^\mu(\vec{r}, t) = \int_{3D} G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') j^\mu(\vec{r}', t') d^3 r' dt' = \int_{3D} \frac{j^\mu(t - \vec{r} - \vec{r}' , \vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' } d^3 r'$ (Ladung taucht zum Zeitpunkt t' am Ort $\vec{r}'$ auf und verschwindet gleich wieder. Effekt „retardiert“ zum Zeitpunkt $t = t' + \vec{r} - \vec{r}'$ am Ort $\vec{r}$) Alternative Weg: „avanciert“: unterer HK, Pole oben umgehen; „kausal“: Umgehung der Pole „unten“/„oben“, „antikausal“: „oben“/„unten“

SRT und Lorentz-Transformation

Beta und Gamma	$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$; $\beta = \frac{v}{c}$	In d Raumdimensionen bzw. D Raumzeitdimensionen gibt es d Boosts und $\frac{d(d-1)}{2} = \frac{D(D-1)}{2}$ Rotationen. Rotationen gehören zur Gruppe $SO(d)$. <u>Postulate</u> : Konstanz von c , kein bevorzugtes IS.				
Lorentztransformation:	Sei S' das „bewegte“ System, und S das „ruhende“ System; d.h. die Geschwindigkeit und die Richtung von S' gegenüber S bestimmen die Größe und das Vorzeichen von β .		Aktive LT: Wie sieht „bewegtes“ S' im „ruhenden“ S aus? $\mathbf{a}^\mu = \Lambda^\mu_\nu \mathbf{a}'^\nu$		Passive LT: Wie sieht „ruhendes“ S im „bewegten“ S' aus? $\mathbf{a}^\mu = \tilde{\Lambda}^\mu_\nu \mathbf{a}'^\nu$	
Aktive LT Boost in x , $S' \rightarrow S$:	$\Lambda^\mu_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Aktive LT Boost in y , $S' \rightarrow S$:	$\Lambda^\mu_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & \beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Aktive LT Boost in z , $S' \rightarrow S$:	$\Lambda^\mu_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$	Eigenschaften: $\tilde{\Lambda}^\mu_\nu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu$ $\det(\Lambda) = +1$
Passive LT Boost in x , $S \rightarrow S'$:	$\tilde{\Lambda}^\mu_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Passive LT Boost in y , $S \rightarrow S'$:	$\tilde{\Lambda}^\mu_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Passive LT Boost in z , $S \rightarrow S'$:	$\tilde{\Lambda}^\mu_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$	$\Lambda \in \mathcal{L}^+_4$ $\mathcal{L}^+_4 \in SO(3,1)^+$ Lorentzgruppe orthochron
Drehung:	Aktive Drehung: Objekt wird in festem Koordinatensystem gedreht.			Passive Drehung: Das Koordinatensystem wird gedreht.		
Aktive Drehung um x :	$D^\mu_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$	Aktive Drehung um y :	$D^\mu_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$	Aktive Drehung um z :	$D^\mu_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Passive Drehung um x :	$\tilde{D}^\mu_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$	Passive Drehung um y :	$\tilde{D}^\mu_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$	Passive Drehung um z :	$\tilde{D}^\mu_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Rapidität:	$\xi = \operatorname{artanh}(\beta) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E+c \vec{p} }{E-c \vec{p} } \right)$		$\beta = \tanh(\xi)$	$\gamma = \cosh(\xi)$	$\beta\gamma = \sinh(\xi)$	$\xi_{ges} = \xi_1 + \xi_2$ $v_{ges} = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$
Einfache LT's à la GDPH 1	Ort: $x = \gamma(x' + vt')$ $y = y'$ $z = z'$	$x' = \gamma(x - vt)$ $y' = y$ $z' = z$	Geschw. $v_x = \frac{v'_x+v}{1+v'_x \frac{v}{c^2}}$ $v_x' = \frac{v_x-v}{1-v_x \frac{v}{c^2}}$	$v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1+v'_x \frac{v}{c^2})}$ $v_y' = \frac{v_y}{\gamma(1-v_x \frac{v}{c^2})}$	$v_z = \frac{v'_z}{\gamma(1+v'_x \frac{v}{c^2})}$ $v_z' = \frac{v_z}{\gamma(1-v_x \frac{v}{c^2})}$	
Zeitpunkt:	$t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right)$ $t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$	Dauer: $\tau = \gamma \tau_0$ Masse: $m = \gamma m_0$	Länge: $l = \frac{l_0}{\gamma}$	Frequenz $f_B = f_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$; $f_R = f_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$; $f_{\text{traversal}} = \frac{f_0}{\gamma}$		
Invariante:	$ds^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$; $ds^2 > 0$: zeitartig, Kausalität; $ds^2 < 0$: raumartig; $ds^2 = 0$: lichtartig.					
Energie:	$E = E_0 + E_{kin} = m_0 c^2 + mc^2 - m_0 c^2 = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$; $E_{kin} = E - E_0 = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2$					
	$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 = E_0^2 \dots \text{invariant}$					

4er Formalismus mit Minkowski-Metrik

4er- Vektor kontra- variant	$a^\mu = \begin{pmatrix} a^0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vec{a} \end{pmatrix}$	4er- Gra- dient	$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \partial_t \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}$	Qua- bla:	$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2$	Minkowski- metrik (kar- th. Koord.):	$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; $\det(\eta_{\mu\nu}) = -1$	4er-Vektoren u. Tensoren und ihre Skalarprodukte sind Lorentz-invariant.
Index unten $\Leftrightarrow$ „kovariant“, Index oben $\Leftrightarrow$ „kontravariant“.						Indexwechsel ko/kontra in Metrik(+,-,-,-) $\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel bei a_1, a_2, a_3		
Rechen- regeln	$\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\sigma} = \eta^\mu{}_\sigma = \delta^\mu_\sigma$ $a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu$ $a^\mu = \eta^{\mu\nu} a_\nu$ $A^{\mu\nu} = A^\mu{}_\beta \eta^{\beta\nu} = \eta^{\mu\alpha} A_{\alpha\beta} \eta^{\beta\nu}$ $A_{\mu\nu} = A_\mu{}^\beta \eta_{\beta\nu} = \eta_{\mu\alpha} A^{\alpha\beta} \eta_{\beta\nu}$							
	$A^\mu{}_\nu B^{\nu\tau} = A^\mu{}_\beta \eta^{\beta\nu} B^\tau{}_\nu = A^\mu{}_\beta B^{\tau\beta} = A^\mu{}_\nu B^{\mu\nu} \quad (\eta_{\mu\nu})^{-1} = \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = (\eta^{\mu\nu})^{-1}$ $\eta^{\mu\nu} = \eta^{\nu\mu}$ $\partial^\mu x_\nu = \delta^\mu_\nu$ $\partial^\mu x^\nu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu x_\nu = \eta_{\mu\nu}$							
	$(A^{\mu\nu})^T = A^\nu{}_\mu \quad (\Lambda^\mu{}_\nu)^T = A_\nu{}^\mu \quad (A^{\mu\nu})^{-1} = A_{\mu\nu} \quad A_{\mu\beta} B^\beta{}_\nu = A_\mu{}^\beta B_{\beta\nu} \hat{=} (\underline{A\overline{B}})_{\mu\nu} \quad A_{\beta\nu} B_\mu{}^\beta = A^\beta{}_\nu B_{\mu\beta} = B_{\mu\beta} A^\beta{}_\nu = B_\mu{}^\beta A_{\beta\nu} \hat{=} (\underline{B\overline{A}})_{\mu\nu}$							
	$A^\beta{}_\mu B_{\beta\nu} = A_{\beta\mu} B^\beta{}_\nu = (A^T)^\beta{}_\mu B_{\beta\nu} = (A^T)_{\mu\beta} B^{\beta\nu} \hat{=} (\underline{A^T\overline{B}})_{\mu\nu} \quad A_{\mu\beta} B^{\beta\nu} = A_\mu{}^\beta B_{\beta\nu} = A_{\mu\beta} (B^T)^\beta{}_\nu = A_\mu{}^\beta (B^T)_{\beta\nu} \hat{=} (\underline{A\overline{B^T}})_{\mu\nu}$							
Skalarprodukt in $\mathbb{R}^{3,1}$: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{b} = a^\mu \eta_{\mu\nu} b^\nu = a_\mu b^\mu$								
Jeder Tensor 2. Stufe kann in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil zerlegt werden: $A_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) + \frac{1}{2} (A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$								
4er-Ortsvektor (kontravariant)	$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$	Eigenzeit τ in S'	$ds^2 = ds'^2 \Rightarrow c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 d\tau^2 \Rightarrow d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right) dt^2 \Rightarrow \boxed{d\tau = \frac{1}{\gamma} dt}$					
4er-Geschw. (kontravariant)	$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix}$	$u^\mu u_\mu = \gamma^2 (c^2 - \vec{v}^2) = c^2 > 0 \Rightarrow$ zeitartig	$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c^2}$					
4er- Beschleu- nigung (kontravariant)	$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix} = \gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} c \frac{d\gamma}{dt} \\ \frac{d\gamma}{dt} \vec{v} + \gamma \vec{a} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} c \gamma^3 \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c^2} \\ \gamma^3 \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c^2} \vec{v} + \gamma \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^4 \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c} \\ \gamma^4 \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \end{pmatrix}$	Beschleunigung nur in x-Richtung:	$a^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^4 \frac{a_x v_x}{c} \\ \gamma^4 a_x \end{pmatrix}$					
4er-Impuls (kontravariant)	$p^\mu = m_0 u^\mu = m_0 \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 c + \frac{E_{kin}}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$	$p^\mu p_\mu = p_0^2 - \vec{p}^2 \equiv \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m_0^2 c^2 \dots$ invariant	Masseteilchen: $E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$ masselose Teil.: $E = \vec{p} c = hf$; $\vec{p} = \hbar \vec{k} = \frac{h}{\lambda}$					
4er-Kraft (kontravariant)	$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dp^\mu}{dt} = \begin{pmatrix} F^0 \\ \gamma \vec{F} \end{pmatrix} = m_0 a^\mu$	$\vec{F} = m_0 \gamma \vec{a} + m_0 \gamma^3 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v}$ (für $m_0 = const.$) $\Rightarrow \vec{F} \nparallel \vec{a}$ (außer $\vec{v} \parallel \vec{a} \vee \vec{v} \perp \vec{a}$)						

Hyperbolische Bewegung bei konstanter Beschleunigung a_0 in S'

Geschwindigkeit aus Sicht von S	$\ast) a'_x \stackrel{!}{=} a_0 \Rightarrow a_0 = \gamma^3 a_x(t) = \gamma^3 \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int a_0 dt = \int \gamma^3 dv \Rightarrow a_0 t = \gamma v \Rightarrow v = a_0 t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{a_0 t}{\sqrt{1 + \frac{a_0^2 t^2}{c^2}}}$ AB: $x(0) \stackrel{!}{=} 0$
Beschleunigung aus Sicht von S	$a_0 = \gamma^3 a_x(t) \Rightarrow a_x(t) = \left(1 - \frac{v(t)^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} a_0 = \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{a_0^2 t^2}{1 + \frac{a_0^2 t^2}{c^2}}\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \boxed{a_x(t) = \frac{a_0}{\left(1 + \frac{a_0^2 t^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$
Ortsvektor aus Sicht von S	$x(t) = \int v(t) dt = \frac{c^2}{a_0} \sqrt{1 + \frac{a_0^2 t^2}{c^2}} + k \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{c^2}{a_0} \left(\sqrt{1 + \frac{a_0^2 t^2}{c^2}} - 1\right)}$ AB: $x(0) \stackrel{!}{=} 0$

Maxwell

Feldstärketensor (kontravariant)	$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & B_y \\ +E_y & B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$	Feldstärketensor (kovariant)	$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\sigma} F^{\sigma\tau} \eta_{\tau\nu} = -F_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & +E_x & +E_y & +E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$	
Hodge (dualer) Feldstärketensor (kontravariant) $\vec{E} \rightarrow \vec{B}; \vec{B} \rightarrow -\vec{E}$	$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau} = \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ +B_x & 0 & E_z & -E_y \\ +B_y & -E_z & 0 & E_x \\ +B_z & E_y & -E_x & 0 \end{bmatrix}$	Hodge (dualer) Feldstärketensor (kovariant) $\vec{E} \rightarrow \vec{B}; \vec{B} \rightarrow -\vec{E}$	$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} F^{\sigma\tau} = \begin{bmatrix} 0 & +B_x & +B_y & +B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{bmatrix}$	
Lorentz-invar.:	$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$	$F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = -4\vec{E} \cdot \vec{B}$	Elektr. Ant.: $E^\mu = -\frac{1}{c} u_\nu F^{\mu\nu}$ Magn. Ant.: $B^\nu = -\frac{1}{c} u_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}$	
Lorentz-Trafo	$F'^{\mu\nu} = \tilde{\Lambda}^\mu{}_\sigma F^{\sigma\tau} \tilde{\Lambda}^\tau{}_\nu = (\tilde{\Lambda} F \tilde{\Lambda}^T)^{\mu\nu}$ $E'_x = E_x; E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z); E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y);$ $B'_x = B_x; B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z); B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y);$			
4er-Maxwell Gleichungen	<u>Annahmen:</u> - Lorentz-invariante Tensorgleichungen mit dem Feldstärketensor $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ - Superpositionsprinzip: Lineare BWGL mit unterschiedlichen Lösungen je nach AB/RB $\Rightarrow$ part. DGL 1. Ordnung - Ansatz: $\partial_\mu F_{\alpha\beta} = \underbrace{Q_{\mu\alpha\beta}}_{\text{Beschleunigungsterm}} + \underbrace{F^{\rho\sigma} Q_{\rho\sigma\mu\alpha\beta}}_{\text{"Reibungsterm"}}$ - Reibungsterm $F^{\rho\sigma} Q_{\rho\sigma\mu\alpha\beta} = 0$ - Quellen j_{mag}^μ und j_{el}^μ sind Viererströme. $\Rightarrow$ verallgemeinerte Maxwell-Gleichungen: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_{el}^\nu$ $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j_{mag}^\mu$; aber: keine magnetischen Monopole, daher: $j_{mag}^\mu \stackrel{!}{=} 0^\mu$ und $j_{el}^\nu = j^\nu$ $\Rightarrow$ tatsächliche Maxwell-Gleichungen in 4er-Schreibweise (kovariant): $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$... inhomogene Maxwellgleichung $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0^\mu$... homogene Maxwellgleichung			
	4er-Stromdichte	$j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$ ρ ... Ladungsdichte $\vec{j}$... el. Stromdichte	4er-E- Vektor	$E^\mu = -\frac{1}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$
Kontinuitäts- gleichung	$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \Rightarrow \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu \frac{4\pi}{c} j^\nu$ Satz von Schwarz $\stackrel{\mu \rightarrow \nu}{\nu \rightarrow \mu} \hat{=} -\partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu} \hat{=} -\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} \Rightarrow \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ $\frac{4\pi}{c} \partial_\nu j^\nu = 0 \Rightarrow \boxed{\partial_\nu j^\nu = 0} \Rightarrow \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (c\rho) + \partial_i j_i = \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}$... „Ladung ist eine Erhaltungsgröße“ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \left \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t} \dots (1) \right.$ $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}\right) \Rightarrow 0 = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 0 = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}$			
	3er $\leftrightarrow$ 4er-Größen	$\vec{E} \sim E_i; \vec{B} \sim B_i; \vec{j} \sim j^i(!); E_i = F^{i0} = F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0; B_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}; (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})_i = \partial_i E_i; (\vec{\nabla} \times \vec{E})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j E_k$		
3er-Maxwell Gleichungen cgs-Gauß-System	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$	Gauß: Die Raumladungen sind Quellen oder Senken des E-Feldes	inh. MWGL, $\partial_\mu F^{\mu 0} = \frac{4\pi}{c} j^0$	
	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Magn. Feldlinien geschlossen, es gibt keine magn. Monopole	hom. MWGL, 0-Komponente	
	$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	Induktionsg., Faraday, E-Feld hat bei $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ Wirbel (statisch: Stokes)	hom. MWGL, i-Komponente	
	$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$	Ampereschtes Gesetz: B-Feld hat bei veränd. E-Feld Wirbel	inh. MWGL, $\partial_\mu F^{\mu i} = \frac{4\pi}{c} j^i$	
Lorenzkraft- dichte	$f_{(L)}^\mu = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu$	in Kom- ponenten	$f_{(L)}^0 = \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{j}; f_{(L)}^i = \rho E_i + \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} j^j B_k; \vec{f}_{(L)} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}$	
Energiedichte EM-Feld	$w_{em} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$	Energiestromdichte EM-Feld (Poynting-V.)	$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})$ Poynting mittel	$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} (\vec{E} \times \vec{B}^*)$
Kontinuitätsgl.	$\partial_t w_{mech} + \partial_t w_{em} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 \Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{1}{8\pi} \partial_t (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \frac{c}{4\pi} \partial_t (\vec{E} \times \vec{B}) = 0$			
Energieerhaltung	$\frac{d}{dt} W_{mech} + \frac{d}{dt} W_{em} = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{S} dV \stackrel{\text{Gauss}}{=} - \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{f}$			

Elastisch (dieselben Teilchen)	$\sum_A p_A^\mu = \sum_A p'^\mu_A$	2 elastisch im SPS: $p_{SPS}^\mu = \begin{pmatrix} Mc \\ \vec{0} \end{pmatrix}; p_{SPS}^\mu p_\mu^{SPS} = M^2 c^2; E_A = E'_A; E_B = E'_B$	2 elastisch im Lab.syst.: $p_{ges}^\mu p_\mu^A = p_{ges}^\mu p'^\mu_A$
Inelastisch (untersch. Teilchen)	$\sum_A p_A^\mu = \sum_{A'} p'^\mu_{A'}$	Zerfall $m_1 \rightarrow m_2, m_3$: $p_1^\mu = p_2^\mu + p_3^\mu \xrightarrow{\text{Syst.1}} \begin{pmatrix} m_1 c \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_2 c + \frac{E_2^{kin}}{c} \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_3 c + \frac{E_3^{kin}}{c} \\ \vec{p}_3 \end{pmatrix} \Rightarrow m_1 = m_2 + m_3 + \frac{E_2^{kin} + E_3^{kin}}{c^2}$	
E_2^{kin} bei Zerfall $m_1 \rightarrow m_2, m_3$:	$p_1^\mu = p_2^\mu + p_3^\mu \Rightarrow (p_3^\mu)^2 = (p_1^\mu - p_2^\mu)^2 = (p_1^\mu)^2 + (p_2^\mu)^2 - 2p_1^\mu p_2^\mu \Rightarrow m_3^2 c^2 = m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 - 2 \begin{pmatrix} m_1 c \\ \vec{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_2 c + \frac{E_2^{kin}}{c} \\ -\vec{p}_2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow m_3^2 c^2 = m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 - 2(m_1 m_2 c^2 + m_1 E_2^{kin}) \Rightarrow E_2^{kin} = c^2 \frac{(m_1 - m_2)^2 - m_3^2}{2m_1}$		

4er-Potential A^μ	$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \Rightarrow$ löst die hom. Maxwell-Gl.	$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}; A_\mu = (\phi, A_i) = (\phi, -\vec{A})$
$E_i = F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\frac{1}{c} \partial_t A_i - \partial_i \phi \Leftrightarrow \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \phi$		$B_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk} = -\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_i \Leftrightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$
Antisymmetrieren:	$A_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}) F^{\mu\nu} = A_{\mu\nu}^{asym} F^{\mu\nu} + A_{\mu\nu}^{sym} F^{\mu\nu}$ $NR: A_{\mu\nu}^{sym} F^{\mu\nu} = -A_{\mu\nu}^{sym} F^{\nu\mu} = -A_{\nu\mu}^{sym} F^{\nu\mu} \stackrel{\mu \rightarrow \nu}{=} -A_{\mu\nu}^{sym} F^{\mu\nu} \Rightarrow A_{\mu\nu}^{sym} F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \boxed{A_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) F^{\mu\nu} = A_{\mu\nu}^{asym} F^{\mu\nu}}$	
Lösen der hom. MWGL mit A_μ :	$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = 0 \Rightarrow \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta - \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\beta A_\alpha = 0 \Rightarrow \left. \begin{matrix} \alpha \rightarrow \beta \\ \beta \rightarrow \alpha \end{matrix} \right\} 2\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta - \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta = 0 \Rightarrow \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta (\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} - \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha}) = 0 \Rightarrow \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta (\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} + \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}) = 0 \Rightarrow 2\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta = 0 \Rightarrow \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta = 0 \dots \text{stimmt immer, weil:}$ $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta = -\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta} \partial_\alpha \partial_\nu A_\beta = -\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta} \partial_\alpha \partial_\nu A_\beta \stackrel{\alpha \rightarrow \nu, \nu \rightarrow \alpha}{=} -\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta$	
Lösen der hom. MWGL mit $\vec{A}$:	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \dots \text{stimmt immer, weil } \text{div}(\text{rot}(\vec{A})) \text{ immer } = 0 \text{ ist.}$ $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{A} \right) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} \phi) = 0 \Rightarrow \text{stimmt, weil } \text{rot}(\text{grad}(\phi)) = 0$ $-\vec{\nabla} \phi = \vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{A} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A}$	
Eichinvarianz:	sei $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ und $F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu$ mit $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ (Λ reel, hinr. glatt: abelsche Eichsym) $\Rightarrow \boxed{F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}}$	
Lorenz-Eichung	$\partial_\mu A^\mu \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \text{inhom. MWGL: } \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \Leftrightarrow \square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \square \phi = 4\pi \rho; (\text{EM-Wellen})$	
Coulomb-Eichung	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \stackrel{!}{=} 0$ (Dreier-Divergenz verschwindet) $\Rightarrow \vec{\Delta} \phi = -4\pi \rho; \square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{transv}$	Vektor-Poisson: $\Delta A = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$ (kath. einfacher)
Für nat. RB:	$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}}{ \vec{r} - \vec{r}' } dV'; \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$	Biot Savart $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{(\vec{r} - \vec{r}')^3} dV'$
Linienförmige Leiterschleife	$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \oint \frac{d\vec{r}'}{ \vec{r} - \vec{r}' }$	linienförmig: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \oint \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{(\vec{r} - \vec{r}')^3}$

Elektrostatik:	$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0; \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0; \frac{\partial \rho}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0; \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0$	Im Weiteren außerdem: $\vec{B} \stackrel{!}{=} 0; \vec{j} \stackrel{!}{=} 0$	
Maxwellgleichungen in 3er Form (da keine zeitabhängigkeit) cgs-System	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$	Elektrostatik	Gauß: $\oint_{\vec{A}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi Q = 4\pi \int \rho dV$ (Gesamtfluss durch Fläche proportional eingeschl. Ladung)
	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$		Stokes: $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ (Statisches E-Feld ist wirbelfrei und konservatives Kraftfeld)
	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Magnetostatik	Magn. Feldlinien geschlossen, es gibt keine magn. Monopole
	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$		$\text{rot}(\vec{B}) = \text{lokale Stromdichte}$
Potential:	Vektorpotential $\vec{A} = 0 \Rightarrow$ skalares Potential ϕ ausreichend: $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r})$	Spannung: $U = \phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') d\vec{r}'$	
Poissongleichung:	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \phi(\vec{r})) = -\Delta \phi(\vec{r}) = 4\pi \rho(\vec{r})$	Lösung des Laplace-Operators $-\Delta/(4\pi)$ mittels Green'scher Funktion:	
	$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') \stackrel{\text{def}}{=} -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \text{ mit } G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{ \vec{r} - \vec{r}' } + G_{\text{hom}}(\vec{r}, \vec{r}'); \vec{\Delta} G_{\text{hom}}(\vec{r}, \vec{r}') \stackrel{\text{def}}{=} 0 \text{ (RB)} \Rightarrow \phi(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV'$		
	$\Delta \phi(\vec{r}) = 0$ sphärisch: $\phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[A_{lm} r^l + B_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} \right] Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$; bei Sym. um z: $\phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l \frac{1}{r^{l+1}} \right] P_l(\cos \vartheta)$		
Dirichlet RWP:	$\phi(\vec{r}) _{\vec{r} \in \partial V} \stackrel{!}{=} \text{fix}$	Dirichlet Green-Fkt mit $\partial V = \vec{s}'(u, v); \vec{n} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial v}$ nach außen; $d\vec{A}' = \vec{n}(u, v) du dv$	Neumann RWP: $\partial_n \phi(\vec{r}) = \frac{\phi(\vec{r})}{\partial \vec{n}} _{\vec{r} \in \partial V} \stackrel{!}{=} \text{fix}$

Ladungsdichte v. Punktladungen	$\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$	Potential von Punktladungen:	$\phi(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV' = \int \sum_i q_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) \frac{1}{ \vec{r} - \vec{r}_i } d^3r' = \sum_i \frac{q_i}{ \vec{r} - \vec{r}_i }$	
Randbedingung für Fläche F:	$F = \{\vec{r}(u, v) : (u, v) \in B\}$ $\phi(\vec{r}(u, v)) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow q_i, \vec{r}_i;$	Feldstärke:	$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) = \sum_i q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{ \vec{r} - \vec{r}_i ^3}$	Oberfl.-Ldgsdichte: $\sigma(\vec{r}(u, v)) = \frac{1}{4\pi} \vec{E}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(\vec{r}(u, v))$ $\vec{r}(u, v) \dots$ geerdete Oberfläche; $\vec{n} \dots$ "hinein"
Influenzierte Oberfl.ladung:	$Q = \int_{(u,v) \in B} \sigma(\vec{r}(u, v)) dA; dA = du dv \sin \vartheta d\varphi d\vartheta = \sum q_{\text{Spiegel}}$		Kraft auf Ladung q_0 :	$\vec{F}(\vec{r}_0) = q_0 \vec{E}_{\text{Bild}} = \sum_{i=1}^n q_i \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_i}{ \vec{r}_0 - \vec{r}_i ^3}$
Flächenspiegelung:	$d' = -d; q' = -q$	Kugelspiegelung:	$d' = \frac{R^2}{r}; q' = -q \frac{R}{r}$ Spiegelung Linienladung an Zylinder: $d' = \frac{R^2}{r}; \tau' = -\tau$	

Multipolentwicklung

Greensche Funktion karthesisch	$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{ \vec{r} - \vec{r}' } = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 r'^2}{2r^5} + \dots$ $\begin{aligned} 3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 r'^2 &= 3(x'_i x_i)^2 - r'^2 x_i x_i = 3x'_i x_i x'_i - r'^2 \delta_{ij} x_i x_j \\ \Rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{\hat{r}_i \hat{r}_j (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij})}{2r^3} + O\left(\frac{r'^3}{r^4}\right) \end{aligned}$		
Potential:	$\phi(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV' = \frac{q}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{Q_{ij} \hat{r}_i \hat{r}_j}{r^3}$	Dipol- mom.: $\vec{p} \stackrel{\text{def}}{=} \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV'$	Quadrupol moment: $Q_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \int \rho(\vec{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) dV'$
Fernfeld:	$\vec{E}(\vec{r})_{ r \gg 1} = \frac{q\vec{r}}{r^3} + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{r^5} + O(r^{-4})$		
Sphärisch:	$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{ \vec{r} - \vec{r}' } = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \alpha); \alpha \dots \text{Winkel zw. } \vec{r} \text{ und } \vec{r}'; r_{<} \stackrel{\text{def}}{=} \min(r, r'); r_{>} \stackrel{\text{def}}{=} \max(r, r')$		
Potential:	$\phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$	Sphärische Multipolmomente:	$q_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1} \int \rho(\vec{r}') (r')^l Y_{l,m}^*(\vartheta', \varphi') dV'$
Ansatz Potential bei Zylindersymmetrie:	$\phi(r, \varphi) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi)] \left(\frac{r}{R}\right)^m$		
magnetisch	$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$	Magn. Dipolmoment: $\vec{m} \stackrel{\text{def}}{=} \int \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) dV$	$\vec{B}_{dipol} _{r \gg 1} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{dipol} _{r \gg 1} = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{m}r^2}{r^5}$

Makroskopische Elektrostatik/Magnetostatik

Ein Teilchen j	$\phi_j(\vec{r}) \approx \frac{q_j}{ \vec{r} - \vec{r}_j } + \vec{p}_j \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{ \vec{r} - \vec{r}_j } \right) = \frac{q_j}{ \vec{r} - \vec{r}_j } - \vec{p}_j \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{ \vec{r} - \vec{r}_j }$		
Herleitung makros-kopische Maxwell-gleichungen:	$\phi_{mol}(\vec{r}) = \int \left[\frac{\rho_{mol}(\vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' } - \vec{p}_{mol}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{ \vec{r} - \vec{r}' } \right] dV'; \rho_{mol}(\vec{r}) = \sum_j q_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j); \vec{p}_{mol}(\vec{r}) = \sum_j \vec{p}_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j)$ $\vec{E}_{mol}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi_{mol}(\vec{r})$ $\langle \vec{E}_{mol}(\vec{r}) \rangle = \int f(\vec{r}') (-\vec{\nabla}) \phi_{mol}(\vec{r} + \vec{r}') dV'$ $\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{E}_{mol}(\vec{r}) \rangle = \vec{\nabla} \cdot \int f(\vec{r}') (-\vec{\nabla}) \phi_{mol}(\vec{r} + \vec{r}') dV'$ $\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{E}_{mol}(\vec{r}) \rangle = -\Delta \int f(\vec{r}') \phi_{mol}(\vec{r} + \vec{r}') dV'$ $\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{E}_{mol}(\vec{r}) \rangle = -\Delta \int f(\vec{r}') \int \left[\frac{\rho_{mol}(\vec{r}'')}{ \vec{r} + \vec{r}' - \vec{r}'' } - \vec{p}_{mol}(\vec{r}'') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{ \vec{r} + \vec{r}' - \vec{r}'' } \right] dV'' dV'$ $\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{E}_{mol}(\vec{r}) \rangle = -\Delta \int f(\vec{r}') \int [\rho_{mol}(\vec{r}'') - \vec{p}_{mol}(\vec{r}'') \cdot \vec{\nabla}] \frac{1}{ \vec{r} + \vec{r}' - \vec{r}'' } dV'' dV' \quad \left \begin{array}{l} \Delta \text{ wirkt auf } \vec{r} \\ -\Delta \frac{1}{ \vec{r} + \vec{r}' - \vec{r}'' } = 4\pi \delta(\vec{r} + \vec{r}' - \vec{r}'') \end{array} \right.$ $\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{E}_{mol}(\vec{r}) \rangle = \int f(\vec{r}') \int [\rho_{mol}(\vec{r}'') - \vec{p}_{mol}(\vec{r}'') \cdot \vec{\nabla}] 4\pi \delta(\vec{r} + \vec{r}' - \vec{r}'') dV'' dV'$ $\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{E}_{mol}(\vec{r}) \rangle = 4\pi \int f(\vec{r}') [\rho_{mol}(\vec{r} + \vec{r}') - \vec{p}_{mol}(\vec{r} + \vec{r}') \cdot \vec{\nabla}] dV' \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ $\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{E}_{mol}(\vec{r}) \rangle = 4\pi \int f(\vec{r}') [\rho_{mol}(\vec{r} + \vec{r}') - \vec{\nabla} \cdot \vec{p}_{mol}(\vec{r} + \vec{r}')] dV'$ $\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{E}_{mol}(\vec{r}) \rangle = 4\pi \int f(\vec{r}') \rho_{mol}(\vec{r} + \vec{r}') dV' - 4\pi \int \vec{\nabla} \cdot f(\vec{r}') \vec{p}_{mol}(\vec{r} + \vec{r}') dV'$ $\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{E}_{mol}(\vec{r}) \rangle = 4\pi (\rho_{mol}(\vec{r}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{p}_{mol}(\vec{r}))$ $\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{E}_{mol}(\vec{r}) \rangle = 4\pi (\langle \rho_{mol}(\vec{r}) \rangle + \rho_{ext} - \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{p}_{mol}(\vec{r}) \rangle) \quad \rho_f \stackrel{\text{def}}{=} \langle \rho_{mol}(\vec{r}) \rangle + \rho_{ext}$ $\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{E}_{mol}(\vec{r}) \rangle = 4\pi (\rho_f - \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{p}_{mol}(\vec{r}) \rangle) \quad \langle \vec{E}_{mol}(\vec{r}) \rangle \rightarrow \vec{E}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi (\rho_f - \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{p}_{mol}(\vec{r}) \rangle) \quad \vec{P}(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \vec{p}_{mol}(\vec{r}) \rangle \text{ („Polarisation“)}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi (\rho_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r})) \quad \rho_p(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}) \text{ („Polarisationsladungsdichte“)}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi (\rho_f + \rho_p) = 4\pi (\rho_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}) \quad \vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{E} + 4\pi \vec{P} \text{ („dielektrische Verschiebung“) } \Rightarrow \vec{E} = \vec{D} - 4\pi \vec{P}$ $\vec{\nabla} \cdot (\vec{D} - 4\pi \vec{P}) = 4\pi \rho_f - 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} - 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 4\pi \rho_f - 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho_f$		
Maxwell	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho_f \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_f$	Dielekt. Versch: $\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{E} + 4\pi \vec{P}$	Mgn. Feldst.: $\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{B} - 4\pi \vec{M}$
	$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0 \dots \text{homogen, unverändert} \quad \partial_\mu D^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_f^\nu; D^{\mu\nu} \triangleq F^{\mu\nu} (\vec{E} \rightarrow \vec{D}, \vec{B} \rightarrow \vec{H}) \quad \text{Kont. Gl.} \quad \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_f = 0$		
Materialgl. D	$\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{E} + 4\pi \vec{P}; P_i = \chi_{ij} E_j \text{ (+} \xi_{ij} B_j \text{)}; \vec{P} \approx \chi_e \vec{E}; \vec{D} = (1 + 4\pi \chi_e) \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad \chi_e \dots \text{Suzeptibilität; } \epsilon \dots \text{Dielektrizitätskonstante}$		
Materialgl. H	$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{B} - 4\pi \vec{M}; \vec{M} \approx \chi_m \vec{H}; \vec{B} = (1 + 4\pi \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H} \quad \text{Ohm } \vec{j}_f = \sigma \vec{E} \quad \chi_m \dots \text{mag. Suzeptibilität; } \mu \dots \text{Permeabilitätskonstante}$		
MW-Satz:	$\text{Natürliche RB, mitteln über Kugel R, Kugelmittelp. = Ursprung} \quad f(r, \vartheta, \varphi) = \frac{3}{4\pi R^3} H(R - r) \Rightarrow \langle \vec{E}(0) \rangle_R = \vec{E}^>(0) - \frac{1}{R^3} \vec{p}^<(0)$		
Reiner E-Dipol	$\langle \vec{E}(0) \rangle_{R \rightarrow 0} = \vec{E}_{dipol}^{r \gg 1} + \alpha \vec{p} \delta(\vec{r}) = 0 + \alpha \vec{p} \frac{3}{4\pi R^3} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{R^3} \vec{p} \Rightarrow \vec{E}_{dipol}^{rein} = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{r^5} - \frac{4\pi}{3} \vec{p} \delta(\vec{r})$		
reiner M-Dipol	$\langle \vec{B}(0) \rangle_R = \vec{B}^>(0) + \frac{2}{R^3} \vec{m}^<(0) \Rightarrow \langle \vec{B}(0) \rangle_{R \rightarrow 0} = \vec{B}_{dipol}^{rein} = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{m}r^2}{r^5} + \frac{8\pi}{3} \vec{m} \delta(\vec{r})$		
Cl.-Mossotti:	$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} N \chi_{mol} \quad \text{Zusammenhang zwischen Brechungsindex und Dichte } N \text{ bzw. molekularer Polarisierbarkeit } \chi_{mol}$		
Elektrostat. Energie:	$W_E = \frac{1}{8\pi} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV = \frac{\epsilon}{8\pi} \int \vec{E}^2 dV > W_{vac}$	Magnetostat. Energie:	$W_M = \frac{1}{8\pi} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2c} \int \vec{A} \cdot \vec{j} dV$
Poynting-Vkt	$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \vec{H} \hat{k} = \frac{c_{eff}}{8\pi} (\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H}) = c_{eff} w_{em} \hat{k}$	Imp.Dichte	$\vec{g}_{em} = \frac{1}{4\pi c} (\vec{D} \times \vec{B}) = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \vec{S} \quad \text{Eff. LG} \quad c_{eff}^2 = \frac{c^2}{\epsilon \mu}$

Anschlussbedingungen

E-Feld:	Schleife um Grenzfläche mit Höhe Δh und Länge Δs : $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \mid \Delta h, \Delta s \rightarrow 0 \mid \hat{e}_t \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \Leftrightarrow \hat{e}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)$ Gilt auch im dynamischen Fall. Zwar ist dann $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$, aber die Fläche der Schleife ist Null, dh. $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$. Tangentialkomponente immer stetig.						
D-Feld:	Dose mit Höhe Δh hüllt die Grenzflächen ein. Gauß: $4\pi \int \rho_f dV = \oint \vec{D} \cdot d\vec{A} \mid \Delta h \rightarrow 0 \mid \hat{e}_n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 4\pi\sigma_f$ ($\hat{e}_n$ von 1 nach 2) Normalkomponente nur stetig, wenn freie Flächenladungsdichte $\sigma_f = 0$.						
B-Feld:	Dose mit Höhe Δh hüllt die Grenzflächen ein. $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \mid \Delta h \rightarrow 0 \mid \hat{e}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$. Normalkomp. Immer stetig.						
H-Feld:	Schleife um Grenzfläche: $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} \int \vec{j}_f \cdot d\vec{A} \mid \Delta h, \Delta s \rightarrow 0 \mid \hat{e}_t \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} (\hat{e}_n \times \hat{e}_t) \cdot \vec{k}_f \Leftrightarrow \hat{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{k}_f$ Tangentialkomponente nur stetig, wenn Flächenstromdichte $\vec{k}_f = 0$.						
Polarisation:	$-\hat{e}_n \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) = \sigma_p$	Magnetisierung:	$c \hat{e}_n \times (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) = k_m$	Feldlinienverlauf D-Feld:	$\frac{\tan(\alpha_1)}{\epsilon_1} = \frac{\tan(\alpha_2)}{\epsilon_2}$	Feldlinienverlauf H-Feld:	$\frac{\tan(\alpha_1)}{\mu_1} = \frac{\tan(\alpha_2)}{\mu_2}$

Potential, Poissonsgleichung im (linearen) Dielektrikum

Poissonsgleichung:	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \exists \phi: \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \mid \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_f \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \phi) = -\Delta \phi(\vec{r}) = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho(\vec{r})$
	$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{ \vec{r} - \vec{r}' } + G_{hom}(\vec{r}, \vec{r}') \mid \vec{\Delta} G_{hom}(\vec{r}, \vec{r}') \stackrel{\text{def}}{=} 0 \text{ (fixiert RB)} \Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon} \int \rho_f(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV'$

Wellengleichung

Wellengleich. Für E-Feld in Vakuum ($j=0, \rho=0$)	Maxwell: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \mid \vec{\nabla} \times \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} \mid \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \text{ (Maxwell)} \Rightarrow$ $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{E} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}(t, \vec{r}) = 0}$	
Wellengleich. Für B-Feld in Vakuum ($j=0, \rho=0$)	Maxwell: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \mid \vec{\nabla} \times \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} \mid \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \text{ (Maxwell)} \Rightarrow$ $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \Delta \vec{B} = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{B} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{B}(t, \vec{r}) = 0}$	
Ebene monochromatische Welle (E-Feld)	$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \mid \vec{E} = \vec{E}_0 R(\vec{r}) T(t) \Rightarrow \Delta (\vec{E}_0 R(\vec{r}) T(t)) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{E}_0 R(\vec{r}) T(t)) \Rightarrow \vec{E}_0 T(t) \Delta R(\vec{r}) = \frac{1}{c^2} \vec{E}_0 R(\vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t) \mid \frac{1}{\vec{E}_0 R(\vec{r}) T(t)}$ $\frac{\Delta R(\vec{r})}{R(\vec{r})} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T(t)}{T(t)} = -k^2 \Rightarrow \ddot{T} = -k^2 c^2 T \Rightarrow \lambda^2 = -k^2 c^2 \Rightarrow \lambda = \pm i k c$; wähle $\lambda = -i k c = -i \omega \Rightarrow T(t) = e^{-i \omega t}$ $\frac{\Delta R}{R} = -k^2 \Rightarrow \Delta R = -k^2 R \Rightarrow \lambda^2 = -k^2 \Rightarrow \lambda = \pm i k$; wähle $\lambda = i \vec{k} \Rightarrow R(\vec{r}) = e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i \omega t} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}}$	
Ebene monochromatische Welle (B-Feld aus E-Feld)	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = -c \left(\frac{\partial}{\partial y} E_x^0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} - \frac{\partial}{\partial x} E_y^0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right) = -c \left(i k_y E_x^0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} - i k_x E_y^0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right)$ $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c i \begin{pmatrix} k_y E_x^0 - k_x E_y^0 \\ k_x E_y^0 - k_y E_x^0 \end{pmatrix} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = -c i (\vec{k} \times \vec{E}_0) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \Rightarrow \vec{B} = -c i (\vec{k} \times \vec{E}_0) \int e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} dt = -c i (\vec{k} \times \vec{E}_0) \frac{1}{-i \omega} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ $\vec{B} = c \frac{1}{k c} (\vec{k} \times \vec{E}_0) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \hat{k} \times \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}; \vec{B}_0 = \hat{k} \times \vec{E}_0; \vec{B}_0 = \vec{E}_0 }$, außerdem: $\boxed{\vec{E}_0 = -\hat{k} \times \vec{B}_0}$	
Eigensch.:	$ \vec{B}_0 = \vec{E}_0 $; selbe Phase, $\omega = k c$; $\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0$; $\vec{B}_0 \cdot \vec{k} = 0$; $\vec{k}, \vec{E}_0, \vec{B}_0$ bilden orthogonales Dreibein.	
Polarisation	Linear polarisiert: $\vec{E}_0 \in \mathbb{R}^3$ elliptisch: $\vec{E}_0 \in \mathbb{C}^3 \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0^1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + \vec{E}_0^2 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ zirkular: $ \vec{E}_1 = \vec{E}_2 $	
Allgemeine Lösung der Wellengleichung	Superpos., eine Ausbr. richtg $\hat{k}$: $\vec{E}(t, \vec{r}) = \int \vec{E}_0(k) e^{-i k (\vec{k} \cdot \vec{r} - c t)} dk$ plus Gegenrichtg: $\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{k} \cdot \vec{r} - c t) + \vec{E}_2(\vec{k} \cdot \vec{r} + c t)$ Alle Raumrichtungen: $\vec{E}(t, \vec{r}) = \int \vec{E}(k) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - k c t)} d^3 k$ Viererschreibweise: $E_\nu(x^\alpha) = \int E_\nu^0(k_\alpha) e^{-i k_\mu x^\mu} \delta(k^\mu k_\mu) d^4 k$ Kugelwellen: $\square \Psi = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \Psi = 0 \Rightarrow \Psi(t, \vec{r}) = \frac{e^{i(\pm k r - \omega t)}}{r} \propto \frac{1}{r}$	

Wellenausbreitung in homogenen, linearen Medien

Annahmen	$\vec{D} = \epsilon \vec{E}; \vec{B} = \mu \vec{H}; \rho = 0; \vec{j} = \sigma \vec{E}$	Maxwell:	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Telegraphen-Gleichung E-Feld	$\text{Maxwell: } \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \left \vec{\nabla} \times \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \right \quad \left \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right.$ $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \left c_{eff} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \Rightarrow c^2 = c_{eff}^2 \epsilon \mu \right.$ $\Delta \vec{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c_{eff}^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{1}{c_{eff}^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \left(\frac{1}{c_{eff}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\square_{eff} \vec{E} = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$					
Telegraphen-Gleichung H-Feld	$\text{Maxwell: } \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \left \vec{\nabla} \times \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right \quad \left \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \right.$ $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \Rightarrow \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \Delta \vec{H} = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad \left c_{eff} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \Rightarrow c^2 = c_{eff}^2 \epsilon \mu \right.$ $\Delta \vec{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \frac{1}{c_{eff}^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{1}{c_{eff}^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \Delta \vec{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \left(\frac{1}{c_{eff}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\square_{eff} \vec{H} = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}$					
Isolator:	$\sigma = 0 \Rightarrow \square_{eff} \vec{E} = 0; \square_{eff} \vec{H} = 0; \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}; \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}; \sqrt{\epsilon} \vec{E} = \sqrt{\mu} \vec{H} $					Displ.rel.: $\omega = kc_{eff} = \frac{kc}{\sqrt{\epsilon\mu}}$
Leiter:	$\sigma \neq 0 \Rightarrow -\frac{\omega^2}{c_{eff}^2} + \vec{k}^2 = \frac{4\pi i \sigma \omega}{c^2} \Rightarrow \vec{k}^2 = \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2} + \frac{4\pi i \sigma \omega}{c^2} \Rightarrow \boxed{\vec{k}^2 = \eta \mu \frac{\omega^2}{c^2}}; \eta = \epsilon \left(1 + \frac{4\pi i \sigma}{\epsilon \omega} \right)$					$\sqrt{\nu} \vec{E} = \sqrt{\mu} \vec{H} $
Eindringtiefe	Sei $\omega \in \mathbb{R}$ und $\vec{k} = \hat{x}(k_{re} + ik_{im}) \Rightarrow \vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i(k_{re} x - \omega t)} \underbrace{e^{-k_{im} x}}_{\text{Dämpfung}}; \text{Eindringtiefe}$					$d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k_{im}} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}$
Ph.-geschw.	$c_{ph} = c_{eff} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$	Gruppengeschwindigkeit:		$c_{gr}(k_0) = \frac{\partial \omega}{\partial k} \Big _{k=k_0}$	Frontgeschwindigkeit	$c_{front} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\omega(k)}{k}$

Cauchy'scher Residuensatz:

Sei C eine stückweise glatte, geschlossene Kurve, und f sei auf C und in ihrem inneren analytisch, mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten $z_0 \dots z_n$ im Inneren von C:		$\oint_C f(\underline{z}) \, dz = 2\pi i \sum_{z=z_k}^n \text{Res } f(\underline{z})$	$\text{Res}_{z=z_n} f(\underline{z})$ ist der Koeffizient c_{-1} in der Laurent-Entwicklung von f um z_0 :	$\text{Res } f(\underline{z}) = c_{-1}$ $z=z_0$
Residuum bei Pol 1. Ordnung:	$\text{Res } f(\underline{z}) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(\underline{z})$	Residuum bei Pol m. Ordnung:	$\text{Res } f(\underline{z}) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(\underline{z}))$	

Fouriertransformation:

Fourier-Transformierte	$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$	$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ \hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \end{cases}$	Rücktrafo	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk$	Wenn f in x nicht stetig:	$\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk$	
Linearität:	$(a\widehat{f} + b\widehat{g}) = a\widehat{f} + b\widehat{g}$	Fourier-Transf. d. 1. Ableitung:	$\widehat{f'}(k) = ik \widehat{f}(k)$	2. Ableitung	$\widehat{f''}(k) = -k^2 \widehat{f}(k)$	n-te Ableitung:	$\widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n \widehat{f}(k)$
Ableitung d. Fourier-Trans.	$(\widehat{f'(k)})' = (-ix \widehat{f(x)})(k)$	Fourier-Transf. einer Faltung:	$\widehat{(f * g)}(k) = \widehat{f}(k) \widehat{g}(k)$	Fourier-Transf. der part. 2. Abl.:	$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \hat{u}(k, y)}{\partial y^2}$		
$\hat{f}$ beschränkt:	Wenn $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$ existiert (Voraussetzung für Fouriertransformation), dann: $ \hat{f}(k) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$						
Dimension D	Vorfaktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}^D}$						

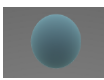
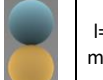
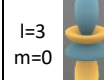
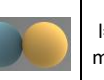
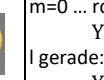
Retardierte Green-Funktion

$\square G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = 4\pi \delta(t - t') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \quad \square \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right)$ $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = 4\pi \delta(t - t') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$ $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') - \Delta G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = 4\pi \delta(t - t') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \quad \Big G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \stackrel{\text{Fourier}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{G}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')} d\omega d^3k$ $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{G}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')} d\omega d^3k - \Delta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{G}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')} d\omega d^3k = 4\pi \delta(t - t') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$ $\frac{1}{c^2} \frac{1}{4\pi^2} \int \tilde{G}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{-i\omega(t-t')} d\omega d^3k - \frac{1}{4\pi^2} \int \tilde{G}(\vec{k}, \omega) \Delta e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')} d\omega d^3k = 4\pi \delta(t - t') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$ $\frac{1}{c^2} \frac{1}{4\pi^2} \int \tilde{G}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} (-\omega^2) e^{-i\omega(t-t')} d\omega d^3k - \frac{1}{4\pi^2} \int \tilde{G}(\vec{k}, \omega) (-k^2) e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')} d\omega d^3k = 4\pi \delta(t - t') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$ $\frac{1}{4\pi^2} \left[- \int \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{G}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')} d\omega d^3k + \int k^2 \tilde{G}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')} d\omega d^3k \right] = 4\pi \delta(t - t') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$ $\frac{1}{4\pi^2} \left[\int \left(k^2 \tilde{G}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')} - \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{G}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')} \right) d\omega d^3k \right] = 4\pi \delta(t - t') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$ $\int \frac{1}{4\pi^2} \tilde{G}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) d\omega d^3k = 4\pi \delta(t - t') \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \quad \Big \delta(t - t') \stackrel{\text{Fourier}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d\omega; \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \stackrel{\text{Fourier}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} d^3k$ $\int \frac{1}{4\pi^2} \tilde{G}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) d\omega d^3k = 4\pi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} d^3k$ $\int \frac{1}{4\pi^2} \tilde{G}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) d\omega d^3k = \int \frac{4\pi}{16\pi^4} e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')} d\omega d^3k \quad \text{Integranden gleichsetzen}$ $\frac{1}{4\pi^2} \tilde{G}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = \frac{1}{4\pi^3} e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')}$ $\tilde{G}(\vec{k}, \omega) \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = \frac{1}{\pi}$ $\tilde{G}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right)} = \frac{c^2}{\pi} \frac{1}{c^2 k^2 - \omega^2} \quad \dots (1) \text{ Zwischenergebnis (fouriertransformierte Green-Funktion)}$	
$G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = \frac{c^2}{4\pi^3} \int \frac{1}{c^2 k^2 - \omega^2} e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')} d\omega d^3k \quad \Big \vec{R} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} - \vec{r}'; \tau \stackrel{\text{def}}{=} t - t'$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{c^2}{4\pi^3} \int \frac{1}{c^2 k^2 - \omega^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} e^{-i\omega\tau} d\omega d^3k \quad \Big \text{wähle } z = \text{Achse Richtung } \vec{R} \Rightarrow \vec{R} = \hat{e}_z R$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{c^2}{4\pi^3} \int \frac{1}{c^2 k^2 - \omega^2} e^{i\vec{k} \cdot \hat{e}_z R} e^{-i\omega\tau} d\omega d^3k \quad \Big \vec{k} \cdot \hat{e}_z = k \cos \vartheta$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{c^2}{4\pi^3} \int \frac{1}{c^2 k^2 - \omega^2} e^{ikR \cos \vartheta} e^{-i\omega\tau} d\omega d^3k \quad \Big d^3k \text{ mit Kugelkoordinaten } k, \vartheta, \varphi \text{ (weil } k = \vec{k} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \text{Radius})$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{c^2}{4\pi^3} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{k=0}^{\infty} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{1}{c^2 k^2 - \omega^2} e^{ikR \cos \vartheta} e^{-i\omega\tau} d\omega k^2 \sin \vartheta dk d\varphi d\vartheta \quad \Big u = \cos \vartheta; du = -\sin \vartheta d\vartheta; u_- = \cos 0 = 1; u^+ = \cos \pi = -1$ $G(\vec{R}, \tau) = -\frac{c^2}{4\pi^3} \int_{u=1}^{-1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{k=0}^{\infty} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{1}{c^2 k^2 - \omega^2} e^{ikRu} e^{-i\omega\tau} d\omega k^2 dk d\varphi du$ $G(\vec{R}, \tau) = +\frac{c^2}{4\pi^3} \int_{u=-1}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{k=0}^{\infty} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{1}{c^2 k^2 - \omega^2} e^{ikRu} e^{-i\omega\tau} d\omega k^2 dk d\varphi du$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{c^2}{4\pi^3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{k=0}^{\infty} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{1}{c^2 k^2 - \omega^2} \left[\int_{u=-1}^1 e^{ikRu} e^{-i\omega\tau} d\omega k^2 dk d\varphi \right]$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{c^2}{4\pi^3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{k=0}^{\infty} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{1}{c^2 k^2 - \omega^2} (e^{ikR} - e^{-ikR}) e^{-i\omega\tau} d\omega \frac{1}{k} k^2 dR d\varphi \quad \Big \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{c^2}{2\pi^2} \int_{k=0}^{\infty} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{1}{c^2 k^2 - \omega^2} (e^{ikR} - e^{-ikR}) e^{-i\omega\tau} d\omega k dk$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{c^2}{2\pi^2} \int_{k=0}^{\infty} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} k (e^{ikR} - e^{-ikR}) \frac{e^{-i\omega\tau}}{c^2 k^2 - \omega^2} dk d\omega \quad \dots (2)$	
... ω-Integral mit Residuensatz, Integration um den unteren Halbkreis, Pole $\pm kc$ oben umgehen... $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{c^2 k^2 - \omega^2} d\omega = -2\pi i \left((\omega + kc) \frac{e^{-i\omega\tau}}{c^2 k^2 - \omega^2} \Big _{\omega \rightarrow -kc} + (\omega - kc) \frac{e^{-i\omega\tau}}{c^2 k^2 - \omega^2} \Big _{\omega \rightarrow kc} \right)$ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{c^2 k^2 - \omega^2} d\omega = -2\pi i \left((\omega + kc) \frac{e^{-i\omega\tau}}{(kc + \omega)(kc - \omega)} \Big _{\omega \rightarrow -kc} + (\omega - kc) \frac{e^{-i\omega\tau}}{(kc + \omega)(kc - \omega)} \Big _{\omega \rightarrow kc} \right)$ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{c^2 k^2 - \omega^2} d\omega = -2\pi i \left(\frac{e^{-i\omega\tau}}{(kc - \omega)} \Big _{\omega \rightarrow -kc} - \frac{e^{-i\omega\tau}}{kc + \omega} \Big _{\omega \rightarrow kc} \right) = -2\pi i \left(\frac{e^{ikc\tau}}{2kc} - \frac{e^{-ikc\tau}}{2kc} \right) = \frac{i\pi}{kc} (e^{-ikc\tau} - e^{ikc\tau}) \stackrel{(2)}{\Rightarrow}$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{c}{2\pi R} \int_0^{\infty} (e^{ikR} - e^{-ikR}) (e^{-ikc\tau} - e^{ikc\tau}) dk$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{c}{2\pi R} \int_0^{\infty} (e^{ikR} e^{-ikc\tau} - e^{ikR} e^{ikc\tau} - e^{-ikR} e^{-ikc\tau} + e^{-ikR} e^{ikc\tau}) dk$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{c}{2\pi R} \int_0^{\infty} (e^{ik(R-c\tau)} - e^{ik(R+c\tau)} - e^{-ik(R-c\tau)} + e^{-ik(R+c\tau)}) dk$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{c}{2\pi R} \int_0^{\infty} (e^{ik(R-c\tau)} - e^{ik(R+c\tau)} - e^{-ik(R+c\tau)} + e^{-ik(R-c\tau)}) dk$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{c}{2\pi R} \int_0^{\infty} (e^{ik(R-c\tau)} - e^{-ik(R+c\tau)}) dk - \frac{c}{2\pi R} \int_0^{\infty} (e^{ik(R+c\tau)} - e^{-ik(R-c\tau)}) dk$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{c}{2\pi R} \int_0^{\infty} (e^{ik(R-c\tau)} - e^{-ik(R+c\tau)}) dk + \frac{c}{2\pi R} \int_0^{\infty} (e^{-iu(R+c\tau)} - e^{iu(R-c\tau)}) du \quad \Big - \int_0^{\infty} (a-b) du = + \int_{-\infty}^0 (a-b) du = - \int_{-\infty}^0 (b-a) du$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{c}{2\pi R} \int_0^{\infty} (e^{ik(R-c\tau)} - e^{-ik(R+c\tau)}) dk + \frac{c}{2\pi R} \int_0^{\infty} (e^{iu(R-c\tau)} - e^{-iu(R+c\tau)}) du \quad \Big u \rightarrow k$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{c}{2\pi R} \int_0^{\infty} (e^{ik(R-c\tau)} - e^{-ik(R+c\tau)}) dk + \frac{c}{2\pi R} \int_{-\infty}^0 (e^{ik(R-c\tau)} - e^{-ik(R+c\tau)}) dk$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{c}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ik(R-c\tau)} - e^{-ik(R+c\tau)}) dk \quad \Big k = \frac{K}{c}; \frac{dk}{dK} = \frac{1}{c} \Rightarrow dk = \frac{1}{c} dK$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{c}{2\pi R} \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\frac{K}{c}(R-c\tau)} - e^{-i\frac{K}{c}(R+c\tau)}) dK = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iK(\frac{R}{c}-\tau)} - e^{iK(-\frac{R}{c}-\tau)}) dK \quad \Big \left(\frac{R}{c} - \tau \right) \stackrel{\text{def}}{=} x_1; \left(-\frac{R}{c} - \tau \right) \stackrel{\text{def}}{=} x_2$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iKx_1} dK - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iKx_2} dK \right) = \frac{1}{R} (\delta(x_1) - \delta(x_2)) = \frac{1}{R} (\delta(-x_1) - \delta(-x_2))$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{\delta(\tau - \frac{R}{c}) - \delta(\tau + \frac{R}{c})}{R} \quad \Big \tau + \frac{R}{c} = t - t' + \frac{R}{c} \text{ wird für } t > t' \text{ niemals 0}$ $G(\vec{R}, \tau) = \frac{\delta(\tau - \frac{R}{c})}{R} \quad \Big \vec{R} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} - \vec{r}' \Rightarrow R = \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' ; \tau \stackrel{\text{def}}{=} t - t'$	
$G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = \frac{\delta(t - t' - \frac{ \vec{r} - \vec{r}' }{c})}{ \vec{r} - \vec{r}' }; t' = t - \frac{ \vec{r} - \vec{r}' }{c}$	
Retard. Potentiale:	$\phi(t, \vec{r}) = \int \rho \left(t - \frac{ \vec{r} - \vec{r}' }{c}, \vec{r}' \right) \frac{1}{ \vec{r} - \vec{r}' } dV'; \vec{A}(t, \vec{r}) = \int \vec{j} \left(t - \frac{ \vec{r} - \vec{r}' }{c}, \vec{r}' \right) \frac{1}{ \vec{r} - \vec{r}' } dV';$

Harmonisch schwingende Punktladung

Nahfeld	$\vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{q}{r^2} \hat{e}_r + \frac{3\hat{e}_r[\hat{e}_r \cdot \vec{p}(t)] - \vec{p}(t)}{r^3}; \vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{\ddot{\vec{p}}(t)}{r^2 c} \times \hat{e}_r$		Fernfeld	$\vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{\hat{e}_r[\hat{e}_r \cdot \ddot{\vec{p}}(t-r/c)] - \ddot{\vec{p}}(t-r/c)}{rc^2}; \vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{\ddot{\vec{p}}(t-r/c)}{rc^2} \times \hat{e}_r \propto \frac{1}{r}$	
Dipolmoment	$\vec{p}(t) = q \vec{x}(t) = q \vec{x}_0 \sin(\omega t)$	Larmor-Formel Abgestr. Leistung	$\langle P \rangle = \frac{2q^2 \dot{\beta}^2}{3c} = \frac{2q^2 \ddot{x}^2}{3c^3} \propto q^2 \ddot{x}^2$		
Thomson Streuqu.	$\sigma(\omega) = \frac{\langle P \rangle}{\langle S \rangle} = \frac{8\pi q^4}{3m^2 c^4} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$	Thomson- Streuquerschnitt:	$\sigma_T(\omega) = \sigma(\omega) _{\omega_0 \ll \omega} = \frac{8\pi q^4}{3m^2 c^4}$	Rayleigh Streuung	$\sigma_r(\omega) = \sigma(\omega) _{\omega_0 \gg \omega} = \frac{8\pi q^4}{3m^2 c^4} \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$

Sonstiges

Kugel:	$\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = r \cos \vartheta \end{pmatrix}; \det \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\vartheta,\varphi,z)} \right) = r^2 \sin \vartheta$	Zylinder:	$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}; \det \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,\varphi,z)} \right) = r; \left \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right = \sqrt{r^2 + z^2}$										
Einh-vekt. Kugel	$\hat{e}_r = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \hat{e}_\vartheta = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)}} \begin{pmatrix} zx \\ zy \\ -x^2-y^2 \end{pmatrix}; \hat{e}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$	Einh-vekt. Zyl.	$\hat{e}_r = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}; \hat{e}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}; \hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$										
Nabla karthesisch:	$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$	Nabla Zylinder-koord.:	$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$	Nabla Kugel-koord.	$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$	La-place Δ	Karth.: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Zylinder: $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Kugel: $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ Allgem.: $\frac{1}{\sqrt{ g }} \partial_i (g^{ij} \sqrt{ g } \partial_j)$						
Rotation karthesisch:	$\vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$	Rotation Kugel-koord.:	$\vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} F_r \\ F_\vartheta \\ F_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (F_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r F_\vartheta) - \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} \right] \end{pmatrix}$	Rotation Zylinder-koord	$\vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} F_r \\ F_\varphi \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \right] \end{pmatrix}$								
Flächenelement in Kugelkoord.:		$dA = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$	Flächenelement Polarkoord.:		$dA = r dr d\varphi$	Linielement Polarkoord.:		$dr = r d\varphi$					
Deltafunktion in D Dimensionen:		$\delta^{(D)}(\vec{x}) = \frac{\delta(x_1) \delta(x_2) \dots \delta(x_D)}{\sqrt{ g }}$	Fourier-Transformation:		$\delta^{(D)}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow \delta^{(D)}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$								
		Zylinderkoord.:	$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(r - r_0) \delta(z - z_0) \frac{\delta(\varphi - \varphi_0)}{r}$	Kugelkoord.:	$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(r - r_0) \frac{\delta(\vartheta - \vartheta_0)}{r} \frac{\delta(\varphi - \varphi_0)}{r \sin(\vartheta)}$								
Legendre-Polynome:		$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-2k)!k!2^n} x^{n-2k}$				orthogonal:		$\int_a^b \rho(x) P_n(x) P_m(x) dx = 0, m \neq n$					
		$P_0(x) = 1; P_1(x) = x; P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1); P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x); \dots$											
Zugeord. Leg.-Polyn.:		$P_l^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$	$P_l^0(x) = P_l(x); P_1^1(x) = -\sqrt{1 - x^2}; P_2^1(x) = -3x\sqrt{1 - x^2}; P_2^2(x) = 3(1 - x^2)$										
Kugel-flächen-funktion		$Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$			$Y_{l,m}^* = (-1)^m Y_{l,-m}; Y_{l,m}(\pi - \vartheta, \pi + \varphi) = (-1)^l Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$								
		$Y_{0,0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}; Y_{1,-1}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\vartheta) e^{-i\varphi}; Y_{1,0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\vartheta); Y_{1,1}(\vartheta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\vartheta) e^{i\varphi}$											
		$Y_{2,0}(\vartheta, \varphi) = -\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2(\vartheta) - 1)$			$Y_{l,0}(0, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}; Y_{l,m}(0, \varphi)_{ m \neq 0} = Y_{l,m}(\pi, \varphi)_{ m \neq 0} = 0; Y_{l,0}(\pi, \varphi) = (-1)^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$								
$l=0$ $m=0$			$l=1$ $m=0$		$l=2$ $m=0$		$l=3$ $m=0$		$l=1$ $m=-1$		$l=1$ $m=1$		$m=0 \dots$ rot.sym. um z $Y(\varphi) = Y(-\varphi)$ l gerade: spiegels. um 0 $Y(\vartheta) = Y(-\vartheta)$