Merkzettel „Folgen und Reihen“ II

06.02.2021

Folgen reeller oder komplexer Zahlen:

Konvergenz von $a_n \in \mathbb{R}^n$ gegen a^*: $\forall \varepsilon > 0: (\exists\, \mathrm{N}(\varepsilon): \forall\, n \geq \mathrm{N}(\varepsilon): \lvert a_n - a^* \rvert < \varepsilon)$	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$
Cauchy-Folge: $\forall \varepsilon > 0: (\exists\, \mathrm{N}(\varepsilon): \forall\, m,n \geq \mathrm{N}(\varepsilon): \lvert a_m - a_n \rvert < \varepsilon)$ Jede Cauchy-Folge ist beschränkt		
Jede reelle Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist, da $\forall \varepsilon > 0: (\exists\, \mathrm{N}(\varepsilon): \lvert a_n - a_m \rvert \leq \lvert a_n - a \rvert + \lvert a_m - a \rvert < 2\varepsilon)$		
Divergenz: $\exists \varepsilon > 0: (\forall N: \exists\, n \geq N: \lvert a_n - a \rvert \geq \varepsilon)$	Bestimmte Konvergenz gegen ∞: $\forall K \in \mathbb{R}_+: \exists N = \mathrm{N}(K): \forall\, n \geq \mathrm{N}(K): n \geq N$	
Bolzano-Weierstrass:	Jede beschränkte unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt.	
Häufungspunkt:	Ein Punkt ist ein Häufungspunkt, wenn in jeder beliebig kleinen ε-Umgebung unendlich viele Punkte liegen.	

Wichtige Summenformeln:

Geometrische Summe q≠1		Arithmetische Summe	Quadratische Summe	Binomischer Lehrsatz
$\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$	bei q=1 ∑=(n+1)	$\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$	$\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$	$(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^n y^{n-k}$

Wichtige konvergente Reihen:

Diverse konvergente nicht-alternierende Reihen

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^m}$; $m \geq 2$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^n}$; $m > 1$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$	$\mathbf{sinh}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbf{cosh}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$	$(0 < \lvert q \rvert < 1)$ „geom. Reihe“	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{c}{n}x^n = (1+x)^c$		$\mathbf{arcsin}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$		$\mathbf{artanh}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	

$\frac{d}{dq}\frac{1}{1-q} = \frac{d}{dq}\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)q^i = \sum_{i=0}^{\infty} iq^i + \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \sum_{i=0}^{\infty} iq^i + \frac{1}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2} \Rightarrow \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} iq^i = \frac{q}{(q-1)^2}}$

Diverse konvergente alternierende Reihen

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n} = \ln 2$	$\mathbf{sin}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbf{cos}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbf{arctan}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Konvergenzbedingungen:

Nicht-alternierende Reihen ∑aₙ (Notwendige Konvergenzbedingung: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) **:**

Konvergente Majorante $\sum m_n$	Konvergenz, wenn fast alle Glieder $0 \leq a_n \leq m_n$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ("*harmonische Reihe*", *divergente Minorante*)	
Divergente Minorante $\sum m_n$	Divergenz, wenn fast alle Glieder $a_n \geq m_n$		
Quotientenkriterium: $r = \lim_{k\to\infty}\left\lvert\frac{a_{k+1}}{a_k}\right\rvert$	Wurzelkriterium: $r = \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\lvert a_k \rvert}$	r<1 … abs. Konv.; r>1 … Divergenz	abs. Konverg.: $\sum\lvert a_k \rvert$ = konv
Integral-Kriterium:	Sei f(x) auf [m,∞] positiv und monoton fallend. Dann: $\left(\int_m^{\infty} \mathrm{f}(x)\,dx\ \textit{konvergent}\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{k=m}^{\infty}\mathrm{f}(k)\ \textit{konvergent}\right)$		
Alternierende Reihen ∑aₙ :	Leibniz-Kriterium:	$\sum a_n$ konvergent, wenn $(\lim_{n\to\infty}\lvert a_n \rvert = 0) \wedge (\lvert a_n \rvert\ \textit{monoton})$	

Diverses:

Potenzreihe ($\underline{z} \in \mathbb{C}$)		**Cauchy'sche Produktreihe**
$\mathrm{p}(\underline{z}) = \sum\limits_{n=a}^{\infty} a_n \underline{z}^n$	Konvergent wenn $\lvert\underline{z}\rvert < R$ mit $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\lvert a_n \rvert}}$ bzw. $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert}$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = a;\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = b \rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{l=0}^{k} a_{k-l}b_l = ab$

Funktionenreihe

Punktweise Konv.	$\forall x \in I: \exists\, \mathrm{f}^*(x): \lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{f}_n(x)) = \mathrm{f}^*(x)$	Punktweise Konvergenz ist notw. Voraussetzung für gleichmäßige Konvergenz
Gleichmäßige Konvergenz	$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}\lvert \mathrm{f}_n(x) - \mathrm{f}(x) \rvert = 0$; mit $\mathrm{f}(x) = \lim_{n\to\infty}\mathrm{f}_n(x)$ bzw.: $\forall \varepsilon > 0: \exists\, \mathrm{N}(\varepsilon): \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}: n \geq \mathrm{N}(\varepsilon): \lvert \mathrm{f}_n(x) - \mathrm{f}^*(x) \rvert < \varepsilon$ Gleichmäßige Konvergenz ⇔ Konvergenz in der Maximum-Norm ⇔ $\lim_{n\to\infty}\lVert f_n - f^* \rVert_\infty = 0$ Ist $\mathrm{f}^*(x)$ unstetig ist $\mathrm{f}_n(x)$ <u>nicht</u> gleichmäßig konvergent!	gleichm. Konvergenz ⇒punktw. Konverg. ⇒ Konvergenz im Quadratmittel
Konvergenz im Quadratmittel:	Konvergenz im Quadratmittel ⇔ Konvergenz in der 2er-Norm ⇔ $\lim_{n\to\infty}\lVert f_n - f^* \rVert_2 = 0$	
Konvergenz in L1	Konv. in L1 ⇔ f_n ist CF ⇔ $\forall \varepsilon > 0: (\exists\, \mathrm{N}(\varepsilon): \forall\, m,n \geq \mathrm{N}(\varepsilon): \lVert f_m - f_n \rVert_1 < \varepsilon) \Leftrightarrow \int_a^b \lvert(\mathrm{f}_n(x) - \mathrm{f}_m(x))\rvert < \varepsilon$	
Konvergenz in L2	Konv. in L2 ⇔ f_n ist CF ⇔ $\forall \varepsilon > 0: (\exists\, \mathrm{N}(\varepsilon): \forall\, m,n \geq \mathrm{N}(\varepsilon): \lVert f_m - f_n \rVert_2^2 < \varepsilon) \Leftrightarrow \int_a^b (\mathrm{f}_n(x) - \mathrm{f}_m(x))^2 < \varepsilon$	

Laurent-Reihen:

Sei f$(\underline{z})$ im Kreisring $r < \lvert z - z_0 \rvert < R$ analytisch. Dann gilt für alle $\underline{z}$ in diesem Kreisring:	$\mathrm{f}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\underline{c}_n(\underline{z} - \underline{z}_0)^n\ \textit{mit}\ \underline{c}_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\mathrm{f}(\underline{z})}{(\underline{z} - \underline{z}_0)^{n+1}}dz;\ C \in \textit{Kreisring}$
Ist c_n=0 für n<0, dann ist z_0 eine hebbare Singularität. Ist c_n=0 für n<-m, dann ist z_0 ein Pol der Ordnung m. Sonst: z_0 ist wesentl. Singularität.	
$\cot(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \frac{1}{7425}z^7 + \mathrm{O}(x^8)$	

Taylor-Entwicklung und Taylor-Reihen von skalaren Funktionen mit einer Variablen:

Entwicklung an x_0:	$\mathrm{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{f}^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \mathrm{f}(x_0) + \frac{\mathrm{f}'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{\mathrm{f}''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{\mathrm{f}^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \mathrm{R}_{n+1}(x)$
Entwicklung an $x_0=0$:	$\mathrm{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{f}^{(n)}(0)}{n!}x^n = \mathrm{f}(0) + \frac{\mathrm{f}'(0)}{1!}x + \frac{\mathrm{f}''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\mathrm{f}^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathrm{R}_{n+1}(x)$
Restglied nicht-alternierende Reihe:	$\mathrm{R}_{n+1}(x) = \frac{\mathrm{f}^{(n+1)}(x_0+\vartheta h)}{(n+1)!}h^{n+1} = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} \mathrm{f}^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt = \mathcal{O}(\lvert h\rvert^{n+1});\ h = x - x_0;\ \ \vartheta \in (0,1)$
Restglied alternierende Reihe: $\lvert R_{n+1}(x)\rvert \leq a_{n+1}$	Konvergenzradius: $r = \lim_{n\to\infty}\left\lvert\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\rvert$

Taylor-Entwicklung und Taylor-Reihen von skalaren Funktionen mit mehreren Variablen:

Entwicklung bis zum quadr. Term an der Stelle $\vec{r}_0$:	$\mathrm{f}(\vec{r}) = \mathrm{f}(\vec{r}_0) + \vec{\nabla}\mathrm{f}(\vec{r}_0)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0) + \frac{1}{2}(\vec{r}-\vec{r}_0)^T\,\mathrm{H}_f(\vec{r}_0)\,(\vec{r}-\vec{r}_0)$	Hesse-Matrix von $\mathrm{f}(x,y)$:	$\mathrm{H}(\mathrm{f}(x,y)) = \nabla^T\nabla\mathrm{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$
Entwicklung bis zum quadr. Term an der Stelle $\vec{0}$:	$\mathrm{f}(\vec{r}) = \mathrm{f}(\vec{0}) + \vec{\nabla}\mathrm{f}(\vec{0})\cdot\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{r}^T\,\mathrm{H}_f(\vec{0})\,\mathrm{f}(\vec{0})\,\vec{r}$	Hesse-Matrix von $\mathrm{f}(x,y,z)$:	$\mathrm{H}(\mathrm{f}(x,y,z)) = \nabla^T\nabla\mathrm{f} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix}$
$\mathrm{f}(x,y) = \mathrm{f}(x_0,y_0) + \frac{\partial\,\mathrm{f}(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial\,\mathrm{f}(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\,\mathrm{f}(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2\,\mathrm{f}(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2\,\mathrm{f}(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right)$			

Implizit gegebene Funktion an einer Stelle mit Taylor-Polynom auflösen:

$\boldsymbol{Implizite\ Funktion}\ \boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}:\ \mathbf{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}\ \boldsymbol{auflösen\ z.B.nach}\ \mathbf{y}(\boldsymbol{x}): \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \boldsymbol{an\ der\ Stelle}\ (\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0}).$	
$Voraussetzungen{:}\ (1)\ \mathrm{f}(x_0,y_0) = 0;\ (2)\ \frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y}\ stetig\ in\ Umgebung\ von\ (x_0,y_0)\,;\ (3)\ \frac{\partial\mathrm{f}(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$	
Entwickle in Taylorpolynom 2. Grades an (x_0, y_0)	$\mathrm{y}(x) = \mathrm{y}(x_0) + \mathrm{y}'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{1}{2}\mathrm{y}''(x_0)\,(x-x_0)^2$
$\mathrm{y}(x_0) = y_0;\ \frac{\partial\mathrm{f}(x,\mathrm{y}(x))}{\partial x}(x_0) = 0 \to \mathrm{y}'(x_0)\,;\ \frac{\partial^2\mathrm{f}(x,\mathrm{y}(x))}{\partial x^2}(x_0) = 0 \to \mathrm{y}''(x_0)$	
$\boldsymbol{Implizite\ Funktion}\ \boldsymbol{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}:\ \mathbf{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \mathbf{0}\ \boldsymbol{auflösen\ z.B.nach}\ \mathbf{z}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ \boldsymbol{an\ der\ Stelle}\ (\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0},\boldsymbol{z_0}).$	
$Voraussetzungen{:}\ (1)\ \mathrm{f}(x_0,y_0,z_0) = 0;\ (2)\ \frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y};\frac{\partial f}{\partial y}\ stetig\ in\ Umgebung\ von\ (x_0,y_0,z_0)\,;\ (3)\ \frac{\partial\mathrm{f}(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \neq 0$	
Entwickle in Taylorpolynom 1. Grades an (x_0, y_0, z_0):	$\mathrm{z}(x,y) = \mathrm{z}(x_0,y_0) + \frac{\partial\mathrm{z}(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial\mathrm{z}(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$
$\mathrm{z}(x_0,y_0) = z_0;\ \frac{\partial\mathrm{f}(x,y,\mathrm{z}(x,y))}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \to \frac{\partial\mathrm{z}(x_0,y_0)}{\partial x};\ \frac{\partial\mathrm{f}(x,y,\mathrm{z}(x,y))}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \to \frac{\partial\mathrm{z}(x_0,y_0)}{\partial y}$	
$\boldsymbol{Implizite\ Funktion}\ \boldsymbol{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2:\ \vec{\mathbf{f}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix}\mathbf{f_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\\ \mathbf{f_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}}\ \boldsymbol{auflösen\ z.B.nach}\ \begin{pmatrix}\mathbf{x}(\boldsymbol{z})\\ \mathbf{y}(\boldsymbol{z})\end{pmatrix}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\ \boldsymbol{an\ der\ Stelle}\ (\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0},\boldsymbol{z_0}).$	
$(1)\ \vec{\mathrm{f}}(x_0,y_0,z_0) = \vec{0};\ (2)\ \frac{\partial\vec{f}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix}(f_1)_x & (f_1)_y & (f_1)_z\\ (f_2)_x & (f_2)_y & (f_2)_z\end{pmatrix} stetig\ in\ U\ (x_0,y_0,z_0)\,;\ (3)\ \frac{\partial\vec{\mathrm{f}}(x_0,y_0,z_0)}{\partial(x,y)} regulär \Leftrightarrow \det\lvert A\rvert \neq 0 \Leftrightarrow \forall\lambda \neq 0$	
Entwickle in Taylorpolynom 1. Grades an (x_0, y_0, z_0): $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathrm{x}'(z_0)\\ \mathrm{y}'(z_0)\end{pmatrix}(z-z_0)$	$\frac{\partial\vec{\mathrm{f}}(x_0,y_0,z_0)}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix}\mathrm{x}'(z_0)\\ \mathrm{y}'(z_0)\end{pmatrix} + \frac{\partial\vec{\mathrm{f}}(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\mathrm{x}'(z_0)\\ \mathrm{y}'(z_0)\end{pmatrix}$

Fourier-Reihen:

Im Reellen:	$\mathrm{f}(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(nx+\varphi_n)$	$A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2};\ \ \varphi_n = \arctan\frac{a_n}{b_n}$
Periode 2π:	$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{f}(x)\,dx\,;\ \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{f}(x)\cos(nx)\,dx;\ \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{f}(x)\sin(nx)\,dx$	Zulässig ist Integration von beliebigem Startpunkt aus, wenn genau eine Periodendauer integriert wird (z.B. – π bis +π statt 0 bis 2π)
Periode T:	$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^{T}\mathrm{f}(x)\,dx\,;\ \ a_n = \frac{1}{T}\int_0^{T}\mathrm{f}(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx;\ \ b_n = \frac{1}{T}\int_0^{T}\mathrm{f}(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx$	
Bei geraden Funktionen *f(-x)=f(x)* nur *cos(nx)-Terme*, bei ungeraden Funktionen *f(-x)=-f(x)* nur *sin(nx)*-Terme.		$\sin(n\pi) = 0; \cos(n\pi) = (-1)^n$
Parceval'sche Gleichung:	$\lVert f\rVert_2^2 = \int_0^{2\pi}\mathrm{f}(x)^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$	
Komplex:	$\mathrm{f}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}\,;\ c_k = \langle\mathrm{f}(x)\,,e^{ikx}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{f}(x)\,e^{-ikx}dx\ \ \ c_{-k} = \bar{c}_k;\ a_n = 2\,\mathrm{Re}(c_n)\ \ n \geq 0;\ b_n = -2\,\mathrm{Im}(c_n)\ \ n \geq 1$	

Wenn $\mathrm{f}(x)$ 2π-periodisch ist, dann konvergiert die FR „im Quadratmittel", d.h. i.S. der 2er-Norm in $L^2(0{,}2\pi)$, d.h.:

- $\int_0^{2\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) - \mathrm{f}(x)\right)^2 dx = 0$

Ist $\mathrm{f}(x)$, abgesehen von einer endlichen Anzahl Sprungstellen im Intervall, außerdem stetig differenzierbar, dann

- konvergiert die FR punktweise gegen $\frac{\mathrm{f}(x_+)+\mathrm{f}(x_-)}{2}$; d.h. der punktweise Grenzwert ist, außer an den Sprungstellen, gleich $\mathrm{f}(x)$ und
- die FR konvergiert gleichmäßig gegen $\mathrm{f}(x)$.