Allgemeine Relativitätstheorie: Mathematische Grundlagen

18.07.2018

Allgemeines zur SRT

Newton	Beliebige Neigung der Weltlinien im Minkowskidiagramm möglich. Zeit ist global. Einheitliche (waagrechte) Gleichzeitebenen für alle Beobachter. Invariante Geschwindigkeit $v = \infty$
Newton BWGL und Einsteins Überlegungen	$F^i(\mathrm{x}^m(t)) = m\,\ddot{\mathrm{x}}^i(t)$ | im Gravitationspotential: $F^i = F_g^i(\mathrm{x}^m(t)) = m\,g^i(\mathrm{x}^m(t)) = -m\partial_i\,\Phi(\mathrm{x}^m(t))$ $\Longrightarrow$ m kürzt sich weg! $\Longrightarrow$ Einstein: „Gravitation ist keine Kraft". Kastenexperiment: Beobachter in geschlossenem, beschleunigtem Kasten kann nicht feststellen, ob er im Gravitationsfeld „ruht", oder im freien Raum beschleunigt. Träge Masse = schwere Masse.
Einstein (SRT)	Maximale Neigung der Weltlinien: 45° (Lichtkegel). Keine globale Zeit. Gleichgeschwindigkeitskegel: Repräsentiert allg. alle Objekte, die sich vom Beobachter mit derselben Geschwindigkeit wegbewegen. Invariante: Lichtgeschwindigkeit, Punkte in der Raumzeit, Lichtkegel (LK). Zwei Punkte im LK können einander beeinflussen; ein Punkt im LK kann einen Punkt außerhalb des LK nicht beeinflussen. Zueinander ruhende Objekte werden durch parallele Weltlinien beschrieben. Relativitätsprinzip: Systeme, die sich gleichförmig zueinander bewegen sind äquivalent.
Konstruktion Gleichzeitebenen	Der Beobachter 1 und 2 sind zu $t = 0$ am selben Ort. Beobachter 1 sendet Licht aus → Lichtkegel. Beobachter 2 bewegt sich vom Beobachter 1 weg. Aber auch für Beobachter 2 bewegt sich die Photonen immer noch mit derselben Geschwindigkeit von ihm weg, egal, wie schnell er ist → Die Gleitzeitebenen von Beobachter 2 müssen sich neigen, sodass der invariante Lichtkegel an jedem Punkt der Weltlinie von Beobachter 2 nach „links und rechts" im Minkowskidiagramm zu selben Zeit (im System von Beobachter 2) denselben Abstand hat
Gerade	Objekte bewegen sich in der gekrümmten Raumzeit auf Geraden. Eine Gerade ist auch im nicht-euklidischen Raum die „kürzeste Verbindung" zwischen zwei Punkten („Geodizität"). Außerdem: Die Tangentenrichtung ist überall gleich („Autoparallelität". Beispiel: Zwei Ameisen starten vom Äquator aus (normal dazu) Richtung Norden) und bewegen sich „autoparallel". Nach jeder intefesimalen Verschiebung gilt eine neue Tangentenebene; die „bisherige" Tangente muss mit der „neuen" verglichen werden. Die Ameisen bewegen sich beide „geradlinig" Richtung Nordpol und „spüren scheinbar eine Kraft", die in Wahrheit nur aus der sphärischen Geometrie stammt.

Herleitung Lorenz-Transformation der SRT

Bedeutung „gestrichene" und „ungestrichene" Koordinaten	Wir legen (willkürlich) fest: Ungestrichenes System I ist „ruhend" (der Beobachter ist hier), gestrichenes System $\bar{I}$ ist „bewegt". Alle Beobachtungen die der „ruhende" Beobachter macht, werden in „ungestrichenen" Koordinaten (inkl. Zeit-Koordinate) ausgedrückt. Alle Beobachtungen die der „bewegte" Beobachter macht, werden in „gestrichenen" Koordinaten ausgedrückt. Beobachtet der „ruhende" Beobachter das „bewegte" System, so muss er erst die „gestrichenen" Koordinaten in „ungestrichene" transformieren.		
Allgemeines	Sei $\bar{I}$ das „bewegte" System, I das „ruhende" System und $\vec{v}$ (bzw. v^i) der Geschwindigkeitsvektor von $\bar{I}$ gegenüber I. Betrag und die Richtung von v^i bestimmen Größe und Vorzeichen der Transformationen.		
Voraussetzungen für Ansatz	(1) Invarianz gegenüber Rotationen (es gibt keine ausgezeichnete Richtung) (2) Einzig „doch" ausgezeichnete Richtung (aufgrund des Experiments): Richtung des Geschwindigkeitsvektors v^i (3) Lineare Transformation (Linien werden auf Linien abgebildet) (4) Universelle Transformation: Es muss egal sein, welches System das „gestrichene" ist, und welches nicht (selbe Regeln für Hin- und Rücktransformation).		
Max. linearer Ansatz mit t und x^i	$\bar{t} = at + b_*^i x^i$ mit $a = a(v)$ (keine ausgez. Richtung, $v = \sqrt{v^k v^k}$) und $b_*^i = b(v)\,v^i$ (v^i einzig ausgez. Richtung) $\bar{x}^i = d_*^i t + h^{ij} x^j$ (mit $d_*^i = d(v)\,v^i$ (v^i einzig ausgez. Richtg) und $h^{ij} = e(v)\,\delta^{ij} + f(v)\,v^i v^j$ (v^i einzig ausgez. Richtg.)		
Ansatz Trafo $I \xrightarrow{v^i} \bar{I}$ ($c = 1$, passive LT)	$\bar{t} = a(v)\,t + b(v)\,v^i x^i\ \left(mit\ v = \sqrt{v^k v^k}\right)$ $\bar{x}^i = d(v)\,v^i t + e(v)\,x^i + f(v)\,v^i v^j x^j$	Umformung für Matrix-darstellung: einheitl. x^j	$\bar{t} = a(v)\,t + b(v)\,v^j x^j$ $\bar{x}^i = d(v)\,v^i t + e(v)\,\delta^{ij} x^j + f(v)\,v^i v^j x^j$
Ansatz Trafo $\bar{I} \xrightarrow{-v^i} I$ ($c = 1$, aktive LT)	$t = a(v)\,\bar{t} - b(v)\,v^i \bar{x}^i\ \left(mit\ v = \sqrt{v^k v^k}\right)$ $x^i = -\,d(v)\,v^i \bar{t} + e(v)\,\bar{x}^i + f(v)\,v^i v^j \bar{x}^j$	Umformung für Matrix-darstellung: einheitl. x^j	$\bar{t} = a(v)\,t - b(v)\,v^j x^j$ $\bar{x}^i = -\,d(v)\,v^i t + e(v)\,\delta^{ij} x^j + f(v)\,v^i v^j x^j$
Matrix $\bar{\Lambda}^{ij}: I \xrightarrow{v^i} \bar{I}$ $\bar{a}^i = \bar{\Lambda}^{ij} a^j$	$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & b(v)\,v^j \\ d(v)\,v^i & e(v)\,\delta^{ij} + f(v)\,v^i v^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x^j \end{pmatrix}$	Matrix $\Lambda^{ij}: \bar{I} \xrightarrow{-v^i} I$ $a^i = \Lambda^{ij} \bar{a}^j$	$\begin{pmatrix} t \\ x^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & -\,b(v)\,v^j \\ -d(v)\,v^i & e(v)\,\delta^{ij} + f(v)\,v^i v^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x}^j \end{pmatrix}$
Matrix $\bar{\Lambda}^{ij}: I \xrightarrow{v^i} \bar{I}$ „ausgeschrieben"	$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & b(v)\cdot v^1 & b(v)\cdot v^2 & b(v)\cdot v^3 \\ d(v)\,v^1 & e(v) + f(v)\,v^1 v^1 & f(v)\,v^1 v^2 & f(v)\,v^1 v^3 \\ d(v)\,v^2 & f(v)\,v^2 v^1 & e(v) + f(v)\,v^2 v^2 & f(v)\,v^2 v^3 \\ d(v)\,v^3 & f(v)\,v^3 v^1 & f(v)\,v^3 v^2 & e(v) + f(v)\,v^3 v^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t} \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$		
Weil universell: Trafo=Rücktrafo	$I \xrightarrow{v^i} \bar{I} \xrightarrow{-v^i} I \Longrightarrow \Lambda^{ki} \bar{\Lambda}^{ij} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0^j \\ 0^k & \delta^{kj} \end{pmatrix}$	Indexumbenennung $\Lambda^{ij} \to \Lambda^{ki} \Longrightarrow \begin{matrix} i \to k \\ j \to i \end{matrix}$	$\Lambda^{ki} = \begin{pmatrix} a(v) & -\,b(v)\,v^i \\ -\,d(v)\,v^k & e(v)\,\delta^{ki} + f(v)\,v^k v^i \end{pmatrix}$
Matrix-ansatz	$\Lambda^{ki} \bar{\Lambda}^{ij} \stackrel{!}{=} \mathbb{1} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a(v) & -\,b(v)\,v^i \\ -\,d(v)\,v^k & e(v)\,\delta^{ki} + f(v)\,v^k v^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(v) & b(v)\,v^j \\ d(v)\,v^i & e(v)\,\delta^{ij} + f(v)\,v^i v^j \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0^j \\ 0^k & \delta^{kj} \end{pmatrix}$		

Aus Matrixansatz extrahierte Gleichungen

l.o.: $a^2 - bdv^2 = 1$ … (1)

r.o.: $abv^j - bv^i(e\delta^{ij} + fv^iv^j) = abv^j - bev^j - bfv^iv^iv^j = (ab - be - bfv^2)v^j = 0^j \Rightarrow ab - be - bfv^2 = 0$ … (2)

l.u.: $-adv^k + (e\delta^{ki} + fv^kv^i)dv^i = -adv^k + dev^k + dfv^iv^iv^k = d(-a+e+fv^2)v^k = 0^k \Rightarrow \underline{d(-a+e+fv^2) = 0}$ … (3)

r.u.: $-bdv^jv^k + (e\delta^{ki} + fv^kv^i)(e\delta^{ij} + fv^iv^j) = -bdv^jv^k + e^2\delta^{ki}\delta^{ij} + ef\delta^{ki}v^iv^j + ef\delta^{ij}v^kv^i + f^2v^kv^iv^iv^j = \delta^{jk}$

$-bdv^jv^k + e^2\delta^{jk} + efv^jv^k + efv^jv^k + f^2v^2v^jv^k = \underline{e^2\delta^{jk} + (-bd+ef+ef+f^2v^2)v^jv^k = \delta^{jk}}$ … (4) $\Rightarrow$

(4) geht nur, wenn $(-bd+ef+ef+f^2v^2)v^jv^k = 0^{jk} \Rightarrow \underline{-bd+ef+ef+f^2v^2 = 0}$ … (5)

(5) in (4) $\Rightarrow e^2\delta^{jk} = \delta^{jk} \Rightarrow e(v) = \pm 1$; aber bei $v^i = 0^i$ muss gelten $\bar{x}^i = x^i$; $\Rightarrow$der Ansatz lautet aber:

$\bar{x}^i = d(v)\,v^it + e(v)\,x^i + f(v)\,v^i(v^jx^j) \Rightarrow e(0) = +1 \Rightarrow$ Unstetigkeit vermeiden $\Rightarrow \boxed{e = 1}$ … (6)

(6) in (1), (2), (3), (5)

$\underline{a^2 - bdv^2 = 1}$ … (7)

$\underline{b(a - 1 - fv^2) = 0}$ … (8)

$\underline{d(1 - a + fv^2) = 0}$ … (9)

$\underline{-bd + 2f + f^2v^2 = 0}$ … (10)

(8) $\Rightarrow a - 1 - fv^2 = 0 \Rightarrow \boxed{f = \frac{a-1}{v^2}}$ … (11)

Betrachten nun von I ein Objekt, das sich mit Ursprung von $\bar{I}$ mitbewegt (also in $\bar{I}$ in Ruhe ist) Trafo $I \xrightarrow{v^i} \bar{I}$:

$$\begin{pmatrix}\bar{t}\\ \bar{x}^i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & b(v)\,v^j \\ d(v)\,v^i & e(v)\,\delta^{ij} + f(v)\,v^iv^j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ x^j\end{pmatrix} \;\Bigg|\; \begin{matrix} x^j = v^jt \\ \bar{x}^i = 0^i \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}\bar{t}\\ 0^i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & b(v)\,v^j \\ d(v)\,v^i & e(v)\,\delta^{ij} + f(v)\,v^iv^j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ v^jt\end{pmatrix} \Rightarrow$$

unten: $0^i = dv^it + (e\delta^{ij} + fv^iv^j)v^jt = dv^it + e\delta^{ij}v^jt + fv^iv^jv^jt = dv^it + ev^it + fv^2v^it = v^it(d + e + fv^2) \overset{(6)}{\Longrightarrow}$

$0^i = v^it(d + 1 + fv^2) \Rightarrow d + 1 + fv^2 = 0 \Rightarrow d = -1 - fv^2 \overset{(11)}{\Longrightarrow} d = -1 - \frac{a-1}{v^2}v^2 = -1 - a + 1 \Rightarrow \boxed{d = -a}$ … (12) $\overset{(7)}{\Longrightarrow}$

$a^2 + abv^2 = 1 \Rightarrow abv^2 = 1 - a^2 \Rightarrow \boxed{b = \frac{1-a^2}{av^2}}$ … (13)

(6), (11), (12), (13) in Matrix

$$\bar{\Lambda}^{ij} = \begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{av^2}v^j \\ -av^i & \delta^{ij} + \frac{a-1}{v^2}v^iv^j\end{pmatrix} \;\Bigg|\; \begin{matrix} v^i = ve^i \\ v^j = ve^j \end{matrix} \Rightarrow \bar{\Lambda}^{ij} = \begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{av}e^j \\ -ave^i & \delta^{ij} + (a-1)e^ie^j\end{pmatrix}$$

Transitivität: $I \xrightarrow{ue^i} \bar{I} \xrightarrow{ve^i} \bar{\bar{I}} \Leftrightarrow I \xrightarrow{we^i} \bar{\bar{I}} \Rightarrow \boxed{\bar{\Lambda}(v)^{ij}\,\bar{\Lambda}(u)^{jk} = \bar{\Lambda}(w)^{ik}}$ … (14)

Umbenennungen

$\bar{\Lambda}^{ij} \to \bar{\Lambda}^{jk} \Rightarrow \begin{matrix} i \to j \\ j \to k \\ v \to u \end{matrix}$ $\bar{\Lambda}^{jk} = \begin{pmatrix} a_u & \frac{1-a_u{}^2}{a_uu}e^k \\ -a_uue^j & \delta^{jk} + (a_u - 1)e^je^k\end{pmatrix}$ $\bar{\Lambda}^{ij} \to \bar{\Lambda}^{ik} \Rightarrow \begin{matrix} j \to k \\ v \to w \end{matrix}$ $\bar{\Lambda}^{ik} = \begin{pmatrix} a_w & \frac{1-a_w{}^2}{a_ww}e^k \\ -a_wwe^i & \delta^{ik} + (a_w - 1)e^ie^k\end{pmatrix}$

Einsetzen in (14)

$$\begin{pmatrix} a_v & \frac{1-a_v{}^2}{a_vv}e^j \\ -a_vve^i & \delta^{ij} + (a_v - 1)e^ie^j\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_u & \frac{1-a_u{}^2}{a_uu}e^k \\ -a_uue^j & \delta^{jk} + (a_u - 1)e^je^k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_w & \frac{1-a_w{}^2}{a_ww}e^k \\ -a_wwe^i & \delta^{ik} + (a_w - 1)e^ie^k\end{pmatrix}$$

Aus Matrixansatz extrahierte Gleichungen

l. o.: $\underline{a_ua_v - a_uu\frac{1-a_v{}^2}{a_vv}e^je^j = a_w}$ … (15)

r.u.: $-a_vv\frac{1-a_u{}^2}{a_uu}e^ie^k + [\delta^{ij} + (a_v - 1)e^ie^j][\delta^{jk} + (a_u - 1)e^je^k] = \delta^{ik} + (a_w - 1)e^ie^k \Rightarrow$

$-a_vv\frac{1-a_u{}^2}{a_uu}e^ie^k + \delta^{ik} + \delta^{ij}(a_u - 1)e^je^k + \delta^{jk}(a_v - 1)e^ie^j + (a_v - 1)(a_u - 1)e^ie^k = \delta^{ik} + (a_w - 1)e^ie^k \,\big|\, -\delta^{ik} \Rightarrow$

$-a_vv\frac{1-a_u{}^2}{a_uu}e^ie^k + \delta^{ij}(a_u - 1)e^je^k + \delta^{jk}(a_v - 1)e^ie^j + (a_v - 1)(a_u - 1)e^ie^k = (a_w - 1)e^ie^k$

$-a_vv\frac{1-a_u{}^2}{a_uu}e^ie^k + (a_u - 1)e^ie^k + (a_v - 1)e^ie^k + (a_v - 1)(a_u - 1)e^ie^k = (a_w - 1)e^ie^k \,\big|: (e^ie^k) \Rightarrow$

$-a_vv\frac{1-a_u{}^2}{a_uu} + (a_u - 1) + (a_v - 1) + (a_v - 1)(a_u - 1) = a_w - 1 \Rightarrow$

$-a_vv\frac{1-a_u{}^2}{a_uu} + a_u - 1 + a_v - 1 + a_ua_v - a_v - a_u + 1 = a_w - 1 \Rightarrow$

$-\frac{a_vv}{a_uu}(1 - a_u{}^2) - 1 + a_ua_v = a_w - 1 \Rightarrow \underline{a_w = -\frac{a_vv}{a_uu}(1 - a_u{}^2) + a_ua_v}$ … (16) $\overset{(15)}{\Longrightarrow}$

$a_ua_v - a_uu\frac{1-a_v{}^2}{a_vv} = -\frac{a_vv}{a_uu}(1 - a_u{}^2) + a_ua_v \,\big|\, -a_ua_v \Rightarrow$

$-a_uu\frac{1-a_v{}^2}{a_vv} = -\frac{a_vv}{a_uu}(1 - a_u{}^2) \,\Big|\cdot\frac{1}{a_uu} \Rightarrow -\frac{1-a_v{}^2}{a_vv} = -\frac{a_vv}{a_u{}^2u^2}(1 - a_u{}^2) \,\Big|\cdot\frac{1}{a_vv} \Rightarrow$

$\frac{a_v{}^2-1}{a_v{}^2v^2} = \frac{a_u{}^2-1}{a_u{}^2u^2} \,\Big|\, \forall u, v \Rightarrow \boxed{\frac{a_v{}^2-1}{a_v{}^2v^2} = k = const}$ … (17)

$a_v{}^2 - 1 = a_v{}^2v^2k \Rightarrow a_v{}^2 - a_v{}^2v^2k = 1 \Rightarrow a_v{}^2(1 - kv^2) = 1 \Rightarrow a_v{}^2 = \frac{1}{1-Kv^2} \Rightarrow \boxed{a_v = \frac{1}{\sqrt{1-kv^2}}}$ … (18)

Bestimmung von K: Was sich in einem BZ mit c bewegt, bewegt sich auch im anderen BZ mit c (Invarianz von c)

(17) $\Rightarrow k = \frac{a^2-1}{a^2v^2} \Rightarrow -k = \frac{1}{a}\frac{1-a^2}{av^2} \overset{(13)}{\Longrightarrow} -k = \frac{1}{a}b \Rightarrow \underline{b = -ka}$ … (19)

$$\begin{pmatrix}\bar{t}\\ \bar{x}^i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{av^2}v^j \\ -av^i & \delta^{ij} + \frac{a-1}{v^2}v^iv^j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ x^j\end{pmatrix} \;\Bigg|\; (17) \Rightarrow k = \frac{a^2-1}{a^2v^2} \Rightarrow -k = \frac{1}{a}\frac{1-a^2}{av^2} \Rightarrow \frac{1-a^2}{av^2} = -ka$$

$$\begin{pmatrix}\bar{t}\\ \bar{x}^i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -kav^j \\ -av^i & \delta^{ij} + \frac{a-1}{v^2}v^iv^j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ x^j\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\bar{t} = at - kax^jv^j = at - ka(\vec{x}\cdot\vec{v}) \Rightarrow \underline{\bar{t}^2 = a^2t^2 - 2ka^2t(\vec{x}\cdot\vec{v}) + k^2a^2(\vec{x}\cdot\vec{v})^2}$ … (20)

$\bar{x}^i = -atv^i + \delta^{ij}x^j + \frac{a-1}{v^2}v^iv^jx^j = -atv^i + x^i + \frac{a-1}{v^2}v^i(v^jx^j) \Rightarrow \vec{\bar{x}} = (-at\vec{v} + \vec{x}) + \frac{a-1}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{x})\vec{v} \Rightarrow$

$\bar{x}^i\bar{x}^i = (-at\vec{v} + \vec{x})^2 + 2(-at\vec{v} + \vec{x})\frac{a-1}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{x})\vec{v} + \frac{(a-1)^2}{v^4}(\vec{v}\cdot\vec{x})^2\vec{v}^2$

$\bar{x}^i\bar{x}^i = a^2t^2\vec{v}^2 - 2at(\vec{v}\cdot\vec{x}) + \vec{x}^2 + 2(-at\vec{v}^2 + \vec{v}\cdot\vec{x})\frac{a-1}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{x}) + \frac{(a-1)^2}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{x})^2$

$\bar{x}^i\bar{x}^i = a^2t^2\vec{v}^2 - 2at(\vec{v}\cdot\vec{x}) + \vec{x}^2 - 2at\vec{v}^2\frac{a-1}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{x}) + 2(\vec{v}\cdot\vec{x})\frac{a-1}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{x}) + \frac{(a-1)^2}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{x})^2$

$\underline{\bar{x}^i\bar{x}^i = a^2t^2\vec{v}^2 - 2at(\vec{v}\cdot\vec{x}) + \vec{x}^2 - 2at(a-1)(\vec{v}\cdot\vec{x}) + 2\frac{a-1}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{x})^2 + \frac{(a-1)^2}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{x})^2}$ … (21)

<table>
<tr>
<td>Fortsetzung:</td>
<td>Die Front eines Lichtblitzes, der zum Zeitpunkt $t = 0$ im Ursprung von I ausgelöst wird, ist eine Kugel im Raum mit Radius ct:
$x^i x^i \overset{!}{=} (ct)^2 \Big| c \overset{!}{=} 1 \Longrightarrow \underline{x^i x^i = t^2} \ldots (22)$
Dasselbe gilt aber auch im System $\bar{I}$ (Invarianz der Lichtgeschwindigkeit):
$\overline{x}^i \overline{x}^i \overset{!}{=} (c\bar{t})^2 \Big| c \overset{!}{=} 1 \Longrightarrow \underline{\overline{x}^i \overline{x}^i = \bar{t}^2} \overset{(20),(21)}{\Longrightarrow}$
$t^2 a^2 \vec{v}^2 - 2at(\vec{v} \cdot \vec{x}) + \vec{x}^2 - 2at(a-1)(\vec{v} \cdot \vec{x}) + 2\frac{a-1}{v^2}(\vec{v} \cdot \vec{x})^2 + \frac{(a-1)^2}{v^2}(\vec{v} \cdot \vec{x})^2 = t^2 a^2 - 2ka^2 t(\vec{x} \cdot \vec{v}) + k^2 a^2 (\vec{x} \cdot \vec{v})^2 \overset{(22)}{\Longrightarrow}$
$t^2 a^2 \vec{v}^2 - 2at(\vec{v} \cdot \vec{x}) + t^2 - 2at(a-1)(\vec{v} \cdot \vec{x}) + 2\frac{a-1}{v^2}(\vec{v} \cdot \vec{x})^2 + \frac{(a-1)^2}{v^2}(\vec{v} \cdot \vec{x})^2 = t^2 a^2 - 2ka^2 t(\vec{x} \cdot \vec{v}) + k^2 a^2 (\vec{x} \cdot \vec{v})^2$
KV. t^2: $a^2 \vec{v}^2 + 1 = a^2 \Longrightarrow a^2 - a^2 \vec{v}^2 = 1 \Longrightarrow a^2(1 - \vec{v}^2) = 1 \Longrightarrow 1 - \vec{v}^2 = \frac{1}{a^2} \overset{(18)}{\Longrightarrow} 1 - \vec{v}^2 = 1 - kv^2 \Longrightarrow \boxed{k = 1} \ldots (23)$
KV. t^1: $-2a(\vec{v} \cdot \vec{x}) - 2a(a-1)(\vec{v} \cdot \vec{x}) = -2ka^2(\vec{x} \cdot \vec{v}) \Longrightarrow -2a(\vec{v} \cdot \vec{x}) - 2a^2(\vec{v} \cdot \vec{x}) + 2a(\vec{v} \cdot \vec{x}) = -2ka^2(\vec{x} \cdot \vec{v}) \Longrightarrow$
$-2a^2(\vec{v} \cdot \vec{x}) = -2ka^2(\vec{x} \cdot \vec{v}) \Longrightarrow \boxed{k = 1}$
KV. t^0: $2\frac{a-1}{v^2}(\vec{v} \cdot \vec{x})^2 + \frac{(a-1)^2}{v^2}(\vec{v} \cdot \vec{x})^2 = k^2 a^2 (\vec{x} \cdot \vec{v})^2 \Longrightarrow \frac{(\vec{v} \cdot \vec{x})^2}{v^2}(2a - 2 + a^2 - 2a + 1) = k^2 a^2 (\vec{x} \cdot \vec{v})^2 \Longrightarrow$
$\frac{1}{v^2}(a^2 - 1) = k^2 a^2 \Longrightarrow \frac{a^2-1}{a^2 v^2} = k^2 \overset{(17)}{=} k \Longrightarrow \boxed{k = 1}$
K ist 1/c² und definiert die invariante Geschwindigkeit (Grenzgeschwindigkeit); ist hier 1, weil c bereits in der Def. von t steckt.</td>
</tr>
<tr>
<td>Endergebnis
Trafo $I \overset{v^i}{\to} \bar{I}$</td>
<td>$a = \frac{1}{\sqrt{1-kv^2}} \widehat{=} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma;\ v^i = \frac{v^i}{1} \widehat{=} \frac{v^i}{c} = \beta^i;\ {}^{*}\frac{1-\gamma^2}{\gamma\beta^2} = \frac{1-\frac{1}{1-\beta^2}}{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\beta^2} = \frac{\frac{1-\beta^2-1}{1-\beta^2}}{\frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{-\sqrt{1-\beta^2}\beta^2}{(1-\beta^2)\beta^2} = -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\gamma \Longrightarrow$
$\overline{\Lambda}^{ij} = \begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{av^2} v^j \\ -av^i & \delta^{ij} + \frac{a-1}{v^2} v^i v^j \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} \gamma & \frac{1-\gamma^2}{\gamma\beta^2}^{*} \beta^j \\ -\gamma\beta^i & \delta^{ij} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta^i\beta^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta^j \\ -\gamma\beta^i & \delta^{ij} + (\gamma-1)\frac{\beta^i\beta^j}{\beta^2} \end{pmatrix}$</td>
</tr>
<tr>
<td>„ausge-schriebene" LT-Matrix für Trafo $I \overset{v^i}{\to} \bar{I}$</td>
<td>$\overline{\Lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_x}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_y & (\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_x}{\beta^2} & 1 + (\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_y}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_z & (\gamma-1)\frac{\beta_z\beta_x}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_z\beta_y}{\beta^2} & 1 + (\gamma-1)\frac{\beta_z\beta_z}{\beta^2} \end{pmatrix}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Minkowsi-Metrik</td>
<td>$\left.\begin{array}{l} x^i x^i = t^2 \Longrightarrow -t^2 + x^i x^i = 0 \\ \bar{x}^i \bar{x}^i = \bar{t}^2 \Longrightarrow -\bar{t}^2 + \bar{x}^i \bar{x}^i = 0 \end{array}\right\} -t^2 + x^i x^i = -\bar{t}^2 + \bar{x}^i \bar{x}^i$ invar. $\Longleftrightarrow x^\mu = \begin{pmatrix} t \\ x^i \end{pmatrix}; \bar{x}^\mu = \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x}^i \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{l} \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu} \bar{x}^\mu \bar{x}^\nu \\ \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \end{array}$
Abstandquadrat $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ … Invariant für alle Inertialsysteme unter LT</td>
</tr>
<tr>
<td>Zusammen-fassung der Herleitung</td>
<td>• Ansatz linear in t und x^i, rotationsinvariant, universell. Einzige bevorzugte Richtung: Richtung von v^i.
• Index von x^i, x^j auf x^j angleichen und GLSYS als Matrix/Vektor-Gleichung anschreiben
• Trafo-Matrix $\overline{\Lambda}^{ij}: I \overset{v^i}{\to} \bar{I}$ mit pos. Vorzeichen, Trafo-Matrix $\Lambda^{ij}: \bar{I} \overset{-v^i}{\longrightarrow} I$ mit neg. Vorzeichen im ersten und dritten Quadranten
• Weil universell: $I \overset{v^i}{\to} \bar{I} \overset{-v^i}{\longrightarrow} I \Longrightarrow \Lambda^{ki} \overline{\Lambda}^{ij} \overset{!}{=} \mathbb{1} \Longrightarrow$ Um das anschreiben zu können, Indexumbenennung $\Lambda^{ij} \to \Lambda^{ki}$
• Vier Gleichungen; Gleichung **r.u.**: $e^2 \delta^{jk} + (-bd + ef + ef + f^2 v^2) v^j v^k = \delta^{jk} \Longrightarrow -bd + ef + ef + f^2 v^2 = 0$ und $e^2 \delta^{jk} = \delta^{jk} \Longrightarrow e = \pm 1$
• Bei $v^i = 0^i$ muss aber gelten $\overline{x}^i = x^i$, wegen Ansatz $\Longrightarrow e(0) = +1 \Longrightarrow$ Unstetigkeit vermeiden $\Longrightarrow e = 1$ (überall)
• $e = 1$ einsetzen in andere Gleichungen, vier neue Gleichungen $\Longrightarrow f = \frac{a-1}{v^2}$
• Betrachten nun aus I ein Objekt, das sich mit Ursprung von $\bar{I}$ mitbewegt $\Longrightarrow$ Trafo $I \overset{v^i}{\to} \bar{I}$ mit $x^j = v^j t$ und $\overline{x}^i = 0^i$
• Gleichung **unten**: $d = -a$; einsetzen in $a^2 - bdv^2 = 1 \Longrightarrow b = \frac{1-a^2}{av^2}$
• Neue Trafo-Matrix, in der nur mehr a vorkommt.
• Transitivität: $I \overset{ue^i}{\longrightarrow} \bar{I} \overset{ve^i}{\longrightarrow} \bar{\bar{I}} \Leftrightarrow I \overset{we^i}{\longrightarrow} \bar{\bar{I}} \Longrightarrow \overline{\Lambda}(v)^{ij}\, \overline{\Lambda}(u)^{jk} = \overline{\Lambda}(w)^{ik}$; Indexumbenennungen $\overline{\Lambda}(v)^{ij} \to \overline{\Lambda}(u)^{jk}; \overline{\Lambda}(v)^{ij} \to \overline{\Lambda}(w)^{ik}$
• Gleichung **l.o.** und **r.u.** nach a_w auflösen, gleichsetzen $\Longrightarrow \frac{{a_v}^2-1}{{a_v}^2 v^2} = \frac{{a_u}^2-1}{{a_u}^2 u^2} \Big| \forall u, v \Longrightarrow \frac{{a_v}^2-1}{{a_v}^2 v^2} = k = const.$
• In Trafo-Matrix $\overline{\Lambda}^{ij}$, in der nur mehr a vorkommt, **r.o.** $\frac{1-a^2}{av^2}$ ersetzen durch $-ka$
• Trafo-Gleichungen aufstellen und quadrieren ($\bar{t}^2 = \cdots, \overline{x}^i \overline{x}^i = \cdots$).
• Invarianz von c: $x^i x^i \overset{!}{=} (ct)^2 = t^2;\ \overline{x}^i \overline{x}^i \overset{!}{=} (c\bar{t})^2 = \bar{t}^2 \Longrightarrow x^i x^i = \overline{x}^i \overline{x}^i \Longrightarrow$ einsetzen $\Longrightarrow$ KV bei t^2 bzw $t^1 \Longrightarrow k = 1$.</td>
</tr>
</table>

Vektorräume

Vektorraum	Man nennt (V,Γ) einen Vektorraum V über den Skalarkörper Γ (z.B. $\mathbb{R},\mathbb{C}$), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: ∃ Vektoradditionsoperator $+: u,v \in V \to (v+w) \in V$, so dass gilt: V1: Assoziativgesetz: $\forall u,v,w \in V: u+(v+w)=(u+v)+w$ V2: ∃ neutrales Vektorelement $\exists\vec{0} \in V: \forall v \in V: v+\vec{0}=\vec{0}+v$ V3: ∃ inverses Vektorelement $\forall v \in V\ \exists(-v) \in V: v+(-v)=\vec{0}$ V4: Kommutativgesetz: $\forall v,w \in V: v+w=w+v$ ∃ Multiplikationsoperator $\cdot: \lambda \in \Gamma,\ v \in V \to (\lambda \cdot v) \in V$, so dass gilt: S1: $\forall\lambda \in \Gamma,\ \forall v,w \in V: \lambda\cdot(v+w)=\lambda v+\lambda w$ S2: $\forall\lambda,\mu \in \Gamma,\ \forall v \in V: (\lambda+\mu)\cdot v=\lambda v+\mu v$ S3: $\forall\lambda,\mu \in \Gamma,\ \forall v \in V: \lambda\cdot(\mu\cdot v)=(\lambda\mu)\cdot v$ S4: neutrales Element 1: $\forall v \in V: 1\cdot v=v$ $\Longrightarrow 0\cdot v=\vec{0}$. Bew.: $0\cdot v=(0+0)\cdot v \overset{S2}{\Rightarrow} 0\cdot v=0\cdot v+0\cdot v \xRightarrow{\text{Kürzen wegen V3 erlaubt}} 0\cdot v=\vec{0}$ ■
Lineare Unabhängigkeit: Definition und Beweis Eindeutigkeit von $\lambda^\alpha v_\alpha$	• Die Vektoren $(v_\alpha)_{\alpha\in I}$ sind dann und nur dann LU, wenn gilt: $\lambda^\alpha v_\alpha=\vec{0} \Longrightarrow \forall\alpha \in I: \lambda^\alpha=0$. • Die Darstellung $v=\lambda^\alpha v_\alpha$ ist eindeutig. ○ Bew.: Annahme: sei $v=\lambda^\alpha v_\alpha=\mu^\alpha v_\alpha \Longrightarrow \lambda^\alpha v_\alpha-\mu^\alpha v_\alpha=\vec{0} \Longrightarrow (\lambda^\alpha-\mu^\alpha)v_\alpha=\vec{0} \xRightarrow{v_\alpha\, LU} \alpha \in I: \lambda^\alpha-\mu^\alpha=0 \Longrightarrow$ $\forall\alpha \in I: \lambda^\alpha=\mu^\alpha$ ■ • Wir suchen ein „maximales“ LU-System (d.h. es kann kein LU Vektor mehr hinzugefügt werden)
Teilgeordnete Menge	$(A,\le)$ ist eine teilgeordnete Menge, wenn gilt: (1) $\forall a \in A: a\le a$, (2) $a,b \in A: a\le b \wedge b\le a \Longrightarrow a=b$, (3) $a,b,c \in A: a\le b \wedge b\le c \Longrightarrow a\le c$ Beispiel: Potenzmenge („Menge aller Teilmengen“) $A=\mathrm{P}(x)=\{T: T\subseteq x\}$; $T_1,T_2 \in A$; $T_1\le T_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} T_1\subseteq T_2$ (1) $\forall T \in A: T\subseteq T$ ✓, (2) $T_1,T_2 \in A: T_1\subseteq T_2 \wedge T_2\subseteq T_1 \Longrightarrow T_1=T_2$ ✓, (3) $T_1,T_2,T_3 \in A: T_1\subseteq T_2 \wedge T_2\subseteq T_3 \Longrightarrow T_1\subseteq T_3$ ✓ Aber: echt überschneidende Teilmengen $T_1 \nsubseteq T_2$ von $\mathrm{P}(x)$ können <u>nicht</u> verglichen werden!
Kette	$K\subseteq(A,\le)$ heißt Kette, wenn <u>jedes</u> Paar von Elementen aus K vergleichbar ist: $\forall a,b \in K: a\le b \vee b\le a$
Lemma von Zorn	Eine teilgeordnete Menge $(A,\le)$, <u>in der jede Kette eine obere Schranke hat</u>, d.h. $\forall K\subseteq A\ \exists s \in A: t\le s\ \forall t \in K^*$, enthält mindestens ein maximales Element $m \in A$ für dass es kein größeres Element in A gibt. *Äquivalent zu Auswahlaxiom: „Wenn ich bei einer Menge von Mengen aus jeder Menge ein Element auswähle, bekomme ich wieder eine Menge“.* *Die obere Schranke muss nicht unbedingt Teil von K sein, z.B. wenn $K=\{k: 0\le k<m: 0<m\le 1\}$
Anwendung Lemma von Zorn: Zeige, dass es in einem endlichdimensionalen Vektorraum eine max. Anzahl LU Vektoren gibt (Basis)	<u>z.Z: ∃ eine maximale LU Teilmenge $M\subset(V,\Gamma)$ („Man kann keinen zu den Vektoren in M LU Vektor mehr hinzufügen“).</u> Eine „LU Menge“ ist eine Menge, die nur zueinander LU Vektoren beinhaltet. Sei $\mathcal{L}=\{L: L\subseteq(V,\Gamma) \wedge L\ ist\ LU\}\subset\mathrm{P}(V)$ (Menge aller LU Teilmengen L von V) Definition: $L_1\le L_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} L_1\subseteq L_2$ • Sei $K\subset\mathcal{L}$ eine Kette in $\mathcal{L}$, d.h. $\forall L_i,L_j \in K: L_i\subseteq L_j \vee L_j\subseteq L_i$ • Sei L^* die Vereinigung aller Elemente L aus K: $L^*=\bigcup_{L\in K} L$. Offensichtlich gilt: $L_i\le L^*\ \forall L_i \in K \Longrightarrow$ d.h. offensichtlich enthält L^* alle Elemente von K. • L^* ist aber nur dann obere Schranke von K, wenn $L^*\in\mathcal{L}$, d.h. nur wenn L^* LU ist. ○ <u>z.Z.:</u> $L^*\in\mathcal{L} \Leftrightarrow L^*=(v_\alpha)_{\alpha\in I}$ ist LU $\Longrightarrow \lambda^\alpha v_\alpha=\lambda^{\alpha_1}v_{\alpha_1}+\dots+\lambda^{\alpha_n}v_{\alpha_n}=\vec{0} \Leftrightarrow \forall\lambda^{\alpha_i}=0$ ○ Beachte: In einer LK dürfen nur <u>endlich viele λ^α</u> vorkommen. D.h.: Nur eine <u>endliche Anzahl $\lambda^{\alpha_1}\dots\lambda^{\alpha_n}$</u> sind (potentiell) überhaupt ungleich null $\Longrightarrow$wir betrachten nurmehr diese (endlich vielen) $\lambda^{\alpha_1}\dots\lambda^{\alpha_n}$ und $v_{\alpha_1}\dots v_{\alpha_n}$. ○ Jedes $v_\alpha\in L^*$, und $L^*=\bigcup_{L\in K} L \Longrightarrow$ jedes v_{α_i} ist Element mindestens eines $L_{\alpha_i}\in K$: $v_{\alpha_1}\in L_{\alpha_1}\in K,\dots,v_{\alpha_n}\in L_{\alpha_n}\in K$ ○ $\{L_{\alpha_1}\dots L_{\alpha_n}\}$ ist eine (endliche) Teilmenge der Kette K und ist daher selber eine Kette. ○ D.h: entweder ist $L_{\alpha_1}\subseteq L_{\alpha_2}$, dann ist nicht nur $v_{\alpha_2}\in L_{\alpha_2}$, sondern auch $v_{\alpha_1}\in L_{\alpha_2}$, oder es ist $L_{\alpha_2}\subseteq L_{\alpha_1}$, dann ist nicht nur $v_{\alpha_1}\in L_{\alpha_1}$, sondern auch $v_{\alpha_2}\in L_{\alpha_1}$; usw. $\Longrightarrow$ ∃ obere Schranke $L_{\alpha*}$, die alle v_{α_i} beinhaltete und Teil dieser Kette ist. ○ (1) $v_{\alpha_1},\dots,v_{\alpha_n}\in L_{\alpha*}$ ○ (2) $L_{\alpha*}$ ist LU (weil $L_{\alpha*}\in K\subseteq\mathcal{L} \Longrightarrow \lambda^\alpha v_\alpha=\vec{0} \Leftrightarrow \lambda^\alpha=0\ \forall\alpha\in I$ ○ aus (1) und (2) $\Longrightarrow L^*$ ist LU • $\Longrightarrow$für jedes $K\subset\mathcal{L}$ existiert eine obere Schranke L^* • $\Longrightarrow$Lemma von Zorn: ∃ eine „maximales Element“ in $\mathcal{L}$; d.h. maximale LU Teilmenge $M\subset(V,\Gamma)$ (LU Basis)
Zeige, dass jeder Vektor mit dieser Basis erzeugt werden kann	z.Z.: $v\in V$ kann mit Basis $M=(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ erzeugt werden (M ist ein Erzeugersystem). <u>Achtung:</u> E_α ist ein Vektor, kein Skalar. Daher ist α ist ein Zählindex („der wievielte Basisvektor“), kein Komponentenindex. trivialer Fall (1): $\{v\}\cup M=M \Leftrightarrow v\in M \Longrightarrow v=E_{\alpha 0}=1\cdot E_{\alpha 0}+0\cdot E_\alpha \Longrightarrow v\in\mathrm{span}(M)$ allg. Fall (2): $\{v\}\cup M\nsubseteq M \Longrightarrow$ Annahme: $v\notin\mathrm{span}(M) \Longrightarrow M'=M\cup\{v\}$, M ist aber maximal und LU $\Longrightarrow M'$ nicht mehr LU $\Longrightarrow$ mindestens ein $\lambda\neq 0$. $\Longrightarrow$ (i) Entweder sind ein oder mehrere $\lambda^\alpha\neq 0$, aber $\lambda=0$. Dann wäre $\vec{0}=\lambda^\alpha E_\alpha$. Da M L.U. ist, müssen aber alle $\lambda^\alpha=0$ sein. ↯ Widerspruch. (ii) Oder $\lambda\neq 0$, dann: $\vec{0}=\lambda v+\lambda^\alpha E_\alpha \Longrightarrow \lambda v=-\lambda^\alpha E_\alpha \Longrightarrow v=-\frac{\lambda^\alpha}{\lambda}E_\alpha \Longrightarrow v\in\mathrm{span}(M)$ ↯ zur Annahme $v\notin\mathrm{span}(M)$ $\Longrightarrow v\in\mathrm{span}(M)$.

Dualraum

Dualraum	Der Dualraum $V^{\sim} \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi: V \to \Gamma: \varphi\ ist\ linear\}$ ist ein Vektorraum, mit allen linearen Abbildungen $\varphi: V \to \Gamma$ als Vektoren. Definition Vektoradditionsoperator: $(\varphi + \psi)(v) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(v) + \psi(v) \in \Gamma\ \forall\, v \in V$ Definition Multiplikationsoperator Skalar/Vektor: $(\lambda \cdot \varphi)(v) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\, \varphi(v) \in \Gamma\ \forall\, v \in V, \lambda \in \Gamma$
Prüfung Bedingungen $\Longrightarrow$ $V^{\sim}$ ist ein Vektorraum	(1) Beweise: $\{\varphi: V \to \Gamma\}$ ist ein Vektorraum (für beliebige φ) Vektoradditionsoperator (de facto ident mit dem skalaren Additionsoperator, daher ist V1 – V4 trivial): V1: Assoziativgesetz: $\forall \varphi, \psi, \chi \in V^{\sim}: \varphi(v) + (\psi(v) + \chi(v)) = (\varphi(v) + \psi(v)) + \chi(v)$ ✓ V2: $\exists$ neutrales Vektorelement (Funktion $\mathbb{0}(v) \to 0$) $\exists \mathbb{0} \in V^{\sim}: \forall \varphi \in V^{\sim}: \varphi(v) + \mathbb{0}(v) = \mathbb{0}(v) + \varphi(v)$ ✓ V3: $\exists$ inverses Vektorelement $\forall \varphi \in V^{\sim}\ \exists(-\varphi) \in V^{\sim}: \varphi(v) + (-\varphi(v)) = 0$ ✓ V4: Kommutativgesetz: $\forall \varphi, \psi \in V^{\sim}: (\varphi + \psi)(v) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(v) + \psi(v) = \psi(v) + \varphi(v) \stackrel{\text{def}}{=} (\psi + \varphi)(v)$ ✓ Multiplikationsoperator (de facto ident mit dem skalaren Multiplikationsoperator, daher ist S1– S4 trivial): S1: $\forall \lambda \in \Gamma,\ \forall \varphi, \psi \in V: \lambda \cdot (\varphi + \psi)(v) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(\varphi(v) + \psi(v)) = \lambda \cdot \varphi(v) + \lambda \cdot \psi(v)$ ✓ S2: $\forall \lambda, \mu \in \Gamma,\ \forall v \in V: (\lambda + \mu) \cdot \varphi(v) = \lambda \cdot \varphi(v) + \mu \cdot \varphi(v)$ ✓ S3: $\forall \lambda, \mu \in \Gamma,\ \forall v \in V: \lambda \cdot (\mu \cdot \varphi(v)) = (\lambda\mu) \cdot \varphi(v)$ ✓ S4: neutrales Element 1: $\forall v \in V: 1 \cdot \varphi(v) = \varphi(v)$ ✓ (2) Beweise: $U = \{\varphi: V \to \Gamma: \varphi\ linear\}$ ist ein Unterraum von $\{\varphi: V \to \Gamma\}$, und daher auch ein (abgeschlossener) Vektorraum $\Longrightarrow$ z.Z: wenn $\varphi, \psi \in U$, d.h. φ, ψ linear, dann ist auch $(\varphi + \psi) \in U$, d.h. dann ist auch $(\varphi + \psi)$ linear $\Longrightarrow$ z.Z. wenn $\varphi, \psi \in U \Longrightarrow (\varphi + \psi)(v + w) = (\varphi + \psi)(v) + (\varphi + \psi)(w)$ und $(\varphi + \psi)(\lambda \cdot v) = \lambda\, (\varphi + \psi)(v)$. • $(\varphi + \psi)(v + w) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(v + w) + \psi(v + w) \stackrel{Lin.}{=} (\varphi(v) + \varphi(w)) + (\psi(v) + \psi(w)) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi + \psi)(v) + (\varphi + \psi)(w)$ ■ • $(\varphi + \psi)(\lambda \cdot v) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\lambda \cdot v) + \psi(\lambda \cdot v) \stackrel{Lin.}{=} \lambda\, \varphi(v) + \lambda\, \psi(\lambda v) = \lambda(\varphi(v) + \psi(v)) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\, (\varphi + \psi)(v)$ ■ $\Longrightarrow$ Damit ist $U = \{\varphi: V \to \Gamma: \varphi\ linear\}$ ein Unterraum von $\{f: V \to \Gamma\}$ und somit ein Vektorraum
$\varphi(E_\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_\alpha$ bestimmt φ Eindeutig	Sei $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Basis in V. Dann ist $\varphi(v)$ durch die Wirkung auf die Basisvektoren E_α eindeutig bestimmt: $\varphi(E_\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_\alpha \in \Gamma$ Beweis: (1) $\varphi(v) = \varphi(v^\alpha E_\alpha) \stackrel{Lin.}{=} v^\alpha\, \varphi(E_\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} v^\alpha \varphi_\alpha$; (2) $\varphi(v) = v^\alpha \varphi_\alpha \stackrel{Ann.}{=} v^\alpha \psi_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} v^\alpha\, \psi(E_\alpha) \stackrel{Lin.}{=} \psi(v^\alpha E_\alpha) = \psi(v)$ ■
Beispiele	$\varphi = (a, b, c); v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\varphi_1 = \varphi(E_1) = (a, b, c) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a;\ \varphi_2 = \varphi(E_2) = (a, b, c) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b;\ \varphi_3 = \varphi(E_3) = (a, b, c) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c$ $\varphi(v) = (a, b, c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$ $\varphi(v^\alpha E_\alpha) = (a, b, c) \left[x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = (a, b, c) \left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \right] = (a, b, c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$ $v^\alpha\, \varphi(E_\alpha) = x\, (a, b, c) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\, (a, b, c) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\, (a, b, c) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = xa + yb + zc$ $v^\alpha \varphi_\alpha = xa + yb + zc$
Duale Basis ist L.U.	Die duale Basis $(e^\alpha)_{\alpha \in I}$ ist definiert durch ihre Wirkung auf die Basisvektoren des Vektorraums V: $e^\alpha(E_\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \delta^\alpha_\beta$ Die duale Basis ist LU. Beweis: $0 = \lambda_\alpha e^\alpha \vert E_\beta \Longrightarrow 0 = (\lambda_\alpha e^\alpha)(E_\beta) \stackrel{Lin.}{=} \lambda_\alpha\, e^\alpha(E_\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_\alpha \delta^\alpha_\beta = \lambda_\beta \Longrightarrow \forall \lambda_\beta = 0 \Longrightarrow (e^\alpha)_{\alpha \in I}$ ist LU ■
Beweis Beispiel:	Wähle $E_\beta = E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda_\alpha\, e^\alpha(E_\beta) = \lambda_1 (1,0,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 (0,1,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 (0,0,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0$ (genauso für λ_2, λ_3)
Koeffizienten $\lambda_\beta = \varphi_\beta \Longrightarrow$ $\varphi = \varphi_\beta e^\beta$	Jedes Element $\varphi \in V^{\sim}$ lässt sich als LK der Basisvektoren $(e^\beta)_{\beta \in I}$ darstellen, wobei (für endlichdimensionale Vektorräume) gilt: $\varphi = \lambda_\beta e^\beta = \varphi(E_\beta)\, e^\beta = \varphi_\beta e^\beta \Longrightarrow \boxed{\lambda_\beta = \varphi_\beta}$ Beweis 1: $\varphi(E_\alpha) = \varphi_\alpha = \varphi_\beta \delta^\beta_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_\beta \cdot e^\beta(E_\alpha) \stackrel{endl.dim.}{=} (\varphi_\beta e^\beta)(E_\alpha)$ ■ Beweis 2: $\varphi_\beta = \varphi(E_\beta) = (\lambda_\alpha e^\alpha)(E_\beta) \stackrel{endl.dim.}{=} \lambda_\alpha \cdot e^\alpha(E_\beta) = \lambda_\alpha \delta^\alpha_\beta = \lambda_\beta$ ■
Beweis 2 Beispiel:	Wähle $E_\beta = E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \varphi_\beta = \varphi_1 = a = (a, b, c) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\lambda_1 (1,0,0) + \lambda_2 (0,1,0) + \lambda_3 (0,0,1)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$ $\lambda_1 (1,0,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 (0,1,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 (0,0,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \Longrightarrow \lambda_1 = \varphi_1 = a$ (analog $\varphi_2 = b, \varphi_3 = c$)

Bilineare Abbildungen/Vektorräume

Raum bilinearer Abbildungen ist ein Vektorraum	Die Menge $\mathrm{Bil}(V,\Gamma)=\{f: V\times V\to\Gamma: f\,bilinear\}$ ist ein Vektorraum. Definition Vektoradditionsoperator: $(\varphi+\psi)(v,w)\overset{\text{def}}{=}\varphi(v,w)+\psi(v,w)\in\Gamma,\forall\, v,w\in V$ Definition Multiplikationsoperator Skalar/Vektor: $(\lambda\varphi)(v,w)\overset{\text{def}}{=}\lambda\,\varphi(v,w)\in\Gamma,\forall\, v,w\in V,\lambda\in\Gamma$ • Beweise: $\mathrm{Bil}(V,\Gamma)$ ist ein Unterraum von $\{\varphi: V\times V\to\Gamma\}$, und daher auch ein (abgeschlossener) Vektorraum $\Longrightarrow$ z.Z: wenn $\varphi,\psi\in\mathrm{Bil}(V,\Gamma)$, dann ist auch $(\varphi+\psi)\in\mathrm{Bil}(V,\Gamma)$: • $(\varphi+\psi)(v_1+v_2,w)\overset{\text{def}}{=}\varphi(v_1+v_2,w)+\psi(v_1+v_2,w)\overset{Lin.}{=}(\varphi(v_1,w)+\varphi(v_2,w))+(\psi(v_1,w)+\psi(v_2,w))$ $\overset{\text{def}}{=}(\varphi+\psi)(v_1,w)+(\varphi+\psi)(v_2,w)$ ✓ • $(\varphi+\psi)(v,w_1+w_2)\overset{\text{def}}{=}\varphi(v,w_1+w_2)+\psi(v,w_1+w_2)\overset{Lin.}{=}(\varphi(v,w_1)+\varphi(v,w_2))+(\psi(v,w_1)+\psi(v,w_2))$ $\overset{\text{def}}{=}(\varphi+\psi)(v,w_1)+(\varphi+\psi)(v,w_2)$ ✓ • $(\varphi+\psi)(\lambda\cdot v,w)\overset{\text{def}}{=}\varphi(\lambda v,w)+\psi(\lambda v,w)\overset{Lin.}{=}\lambda\,\varphi(v,w)+\lambda\,\psi(v,w)=\lambda(\varphi(v,w)+\psi(v,w))\overset{\text{def}}{=}\lambda\,(\varphi+\psi)(v,w)$ ✓ • $(\varphi+\psi)(v,\lambda\cdot w)\overset{\text{def}}{=}\varphi(v,\lambda w)+\psi(v,\lambda w)\overset{Lin.}{=}\lambda\,\varphi(v,w)+\lambda\,\psi(v,w)=\lambda(\varphi(v,w)+\psi(v,w))\overset{\text{def}}{=}\lambda\,(\varphi+\psi)(v,w)$ ✓ $\Longrightarrow$ Damit ist $\mathrm{Bil}(V,\Gamma)$ ein Unterraum von $\{f: V\times V\to\Gamma\}$ und somit ein Vektorraum
$f(E_\alpha,E_\beta)\overset{\text{def}}{=}f_{\alpha\beta}$ bestimmt f eindeutig	Sei $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Basis in V. Dann ist $f\in\mathrm{Bil}(V,\Gamma)$ durch die Wirkung auf E_α eindeutig bestimmt: $\boxed{f(E_\alpha,E_\beta)\overset{\text{def}}{=}f_{\alpha\beta}\in\Gamma}$ Beweis: (1) $f(v,w)=f(v^\alpha E_\alpha,w^\beta E_\beta)\overset{Bil.}{=}v^\alpha w^\beta f(E_\alpha,E_\beta)\overset{\text{def}}{=}v^\alpha w^\beta f_{\alpha\beta};$ (2) $f(v,w)=v^\alpha w^\beta f_{\alpha\beta}\overset{Ann.}{=}v^\alpha w^\beta g_{\alpha\beta}\overset{\text{def}}{=}v^\alpha w^\beta g(E_\alpha,E_b)\overset{Bil.}{=}g(v^\alpha E_\alpha,w^\beta E_\beta)=g(v,w)$ ■
Tensorprodukt	Sei $\varphi,\psi\in V^\sim$. Die Wirkung des Tensorprodukts $\varphi\otimes\psi\in\mathrm{Bil}(V,\Gamma)$ auf die Vektoren $v,w\in V$ ist: $\boxed{(\varphi\otimes\psi)(v,w)\overset{\text{def}}{=}\varphi(v)\,\psi(w)}$ $\boxed{\otimes^2V^\sim\overset{\text{def}}{=}\{\sum\lambda_{\varphi\psi}\varphi\otimes\psi:\varphi,\psi\in V^\sim\}=\mathrm{Bil}(V,\Gamma)}$ (i.e.: Menge aller LK von $\varphi\otimes\psi:\varphi,\psi\in V^\sim$) Bew.: (1) $\otimes^2V^\sim\subseteq\mathrm{Bil}(V,\Gamma)$ weil $(\varphi\otimes\psi)(v,w)\overset{\text{def}}{=}\varphi(v)\,\psi(w);$ (2) $\mathrm{f}(E_\alpha,E_\beta)=f_{\alpha\beta}=f_{\gamma\delta}\delta^\gamma_\alpha\delta^\delta_\beta\overset{\text{def}}{=}f_{\gamma\delta}\,\mathrm{e}^\gamma(E_\alpha)\,\mathrm{e}^\delta(E_\beta)\overset{\text{def}}{=}\left(f_{\gamma\delta}(\mathrm{e}^\gamma\otimes\mathrm{e}^\delta)\right)(E_\alpha,E_\beta)\Longrightarrow$ $f=f_{\gamma\delta}(\mathrm{e}^\gamma\otimes\mathrm{e}^\delta)\in\otimes^2V^\sim\Longrightarrow\mathrm{Bil}(V,\Gamma)\subseteq\otimes^2V^\sim$; aus (1) und (2) $\Longrightarrow\boxed{\otimes^2V^\sim=\mathrm{Bil}(V,\Gamma)}$ ■

Doppeldualraum

Doppeldualraum	Der Doppeldualraum $(V^\sim)^\sim\overset{\text{def}}{=}\{\Phi: V^\sim\to\Gamma:\varphi\ ist\ linear\}$ ist „der Dualraum des Dualraums“. • $\Phi\in(V^\sim)^\sim$ "schluckt" einen Dualraumvektor $\varphi\in V^\sim$ und liefert einen Skalar: $\Phi:\varphi\mapsto\Phi(\varphi)\in\Gamma$ • Jeder Vektor $v\in V$ kann abgebildet werden auf eine Funktion Φ_v aus dem Doppeldualraum: $P: v\in V\mapsto\Phi_v\in(V^\sim)^\sim$ • Diese Funktion Φ_v aus $(V^\sim)^\sim$ (die eine Verbindung zu v aus V herstellt) ist so definiert: $\boxed{\Phi_v(\varphi)\overset{\text{def}}{=}\varphi(v)}$ • Anschauliche Erklärung: $\Phi_v(\varphi)$ “ist eigentlich dasselbe wie“ $v(\varphi)$ (Identifikation Doppeldualraum/Vektorraum): $\Phi_v(\varphi)=\varphi(v)=\langle\varphi,v\rangle=v(\varphi)$. („Kanonische Paarung“) Additionsoperator: $\Phi_{v+w}(\varphi)\overset{\text{def}}{=}\varphi(v+w)\overset{lin}{=}\varphi(v)+\varphi(w)\overset{\text{def}}{=}\Phi_v(\varphi)+\Phi_w(\varphi)\overset{\text{def}}{=}(\Phi_v+\Phi_w)(\varphi)\Longrightarrow\Phi_{v+w}=\Phi_v+\Phi_w$ Multiplikationsoperator: $\Phi_{\lambda v}(\varphi)\overset{\text{def}}{=}\varphi(\lambda v)\overset{lin}{=}\lambda\,\varphi(v)\overset{\text{def}}{=}\lambda\,\Phi_v(\varphi)=(\lambda\Phi_v)(\varphi)\Longrightarrow\Phi_{\lambda v}=\lambda\Phi_v$ Linearität: (1) $\Phi_v(\varphi+\psi)=(\varphi+\psi)(v)\overset{\text{def}}{=}\varphi(v)+\psi(v)=\Phi_v(\varphi)+\Phi_v(\psi)\in\Gamma;\ \ \forall\, v\in V;\varphi\in V^\sim$ (2): $\Phi_v(\lambda\varphi)\overset{\text{def}}{=}(\lambda\varphi)(v)\overset{lin}{=}\lambda\,\varphi(v)=\lambda\,\Phi_v(\varphi)\in\Gamma;\ \forall\, v\in V,\varphi\in V^\sim;\lambda\in\Gamma$ $\Longrightarrow\Phi_v(\varphi)=v(\varphi)=\varphi(v)\Longrightarrow V\subseteq(V^\sim)^\sim$ ... (1) (gilt immer) Außerdem: $\Phi(e^\alpha)=\Phi^\alpha=\Phi^\beta\delta^\alpha_\beta=\Phi^\beta\,e^\alpha(E_\beta)=\Phi^\beta\,E_\beta(e^\alpha)\overset{endl.dim.}{=}(\Phi^\beta E_\beta)(e^\alpha)\Longrightarrow\Phi=\Phi^\beta E_\beta\Longrightarrow(V^\sim)^\sim\subseteq V$ ... (2) (1), (2) $\Longrightarrow\boxed{(V^\sim)^\sim=V}$ (wenn V endlichdimensional)

Multilineare Abbildungen/Vektorräume

<table>
<tr><td>Raum bilinearer Abbildungen ist ein Vektorraum</td><td>Die Menge $\mathrm{Mult}_p(V,\Gamma)=\{f: V\times\ldots\times V\to\Gamma: f\ \textit{ist lin. in jedem Arg.}\}$ ist ein Vektorraum.
Definition Vektoradditionsoperator: $(\varphi+\psi)(v_1,\ldots,v_p)\overset{\text{def}}{=}\varphi(v_1,\ldots,v_p)+\psi(v_1,\ldots,v_p)\in\Gamma,\forall\, v_1,\ldots,\forall v_p\in V$
Definition Multiplikationsoperator Skalar/Vektor: $(\lambda\varphi)(v_1,\ldots,v_p)\overset{\text{def}}{=}\lambda\,\varphi(v_1,\ldots,v_p)\in\Gamma,\forall\, v_1,\ldots,v_p\in V,\forall\lambda\in\Gamma$
$\Longrightarrow$ Damit ist $(\varphi+\psi)(v,w)$ multilinear. Beweis:
• $(\varphi+\psi)(u_1+u_2,v_2,\ldots,v_p)\overset{\text{def}}{=}\varphi(u_1+u_2,v_2,\ldots,v_p)+\psi(u_1+u_2,v_2,\ldots,v_p)\overset{lin.}{=}$ $\big(\varphi(u_1,v_2,\ldots,v_p)+\varphi(u_2,v_2,\ldots,v_p)\big)+\big(\psi(u_1,v_2,\ldots,v_p)+\psi(u_2,v_2,\ldots,v_p)\big)\overset{\text{def}}{=}$ $(\varphi+\psi)(u_1,v_2,\ldots,v_p)+(\varphi+\psi)(u_2,v_2,\ldots,v_p)$ ✓
• analog in allen anderen Argumenten
• $(\varphi+\psi)(\lambda v_1,v_2,\ldots,v_p)\overset{\text{def}}{=}\varphi(\lambda v_1,v_2,\ldots,v_p)+\psi(\lambda v_1,v_2,\ldots,v_p)\overset{bil.}{=}\lambda\,\varphi(v_1,v_2,\ldots,v_p)+\lambda\,\psi(v_1,v_2,\ldots,v_p)=$ $\lambda\big(\varphi(v_1,v_2,\ldots,v_p)+\psi(v_1,v_2,\ldots,v_p)\big)\overset{\text{def}}{=}\lambda\,(\varphi+\psi)(v_1,v_2,\ldots,v_p)$ ✓
• analog in allen anderen Argumenten
$\Longrightarrow$ Damit ist $\mathrm{Mult}_p(V,\Gamma)$ ein Unterraum von $\{f: V\times\ldots\times V\to\Gamma\}$ und somit ein Vektorraum</td></tr>
<tr><td>Eindeutigkeit</td><td>Sei $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Basis in V. Dann ist $f\in\mathrm{Mult}_p(V,\Gamma)$ durch die Wirkung auf E_α <u>eindeutig</u> bestimmt:
$\boxed{f\left(E_{a_1},\ldots,E_{a_p}\right)\overset{\text{def}}{=}f_{a_1\ldots a_p}\in\Gamma}$
<u>Beweis:</u> (1) $f(v_1,\ldots,v_p)=f\left(v_1^{a_1}E_{a_1},\ldots,v_p^{a_p}E_{a_p}\right)\overset{lin}{=}v^{a_1}\ldots v^{a_p}f\left(E_{a_1},\ldots,E_{a_p}\right)\overset{\text{def}}{=}v^{\alpha_1}\ldots v^{\alpha_p}f_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$;
(2) $f(v_1,\ldots,v_p)=v^{\alpha_1}\ldots v^{\alpha_p}f_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\overset{Ann.}{=}v^{\alpha_1}\ldots v^{\alpha_p}g_{\alpha\beta}\overset{\text{def}}{=}v^{\alpha_1}\ldots v^{\alpha_p}\,g\left(E_{a_1},\ldots,E_{a_p}\right)\overset{lin.}{=}g\left(v_1^{a_1}E_{a_1},\ldots,v_p^{a_p}E_{a_p}\right)=g(v_1,\ldots,v_p)$</td></tr>
<tr><td>Tensorprodukt</td><td>Sei $\varphi_1\ldots\varphi_p\in V^\sim$ und $v_1\ldots v_p\in V$. Dann gilt: $\boxed{(\varphi_1\otimes\ldots\otimes\varphi_p)(v_1,\ldots,v_p)\overset{\text{def}}{=}\varphi_1(v_1)\ldots\varphi_p(v_p)}$
$\boxed{\otimes^p V^\sim\overset{\text{def}}{=}\left\{\lambda_{\varphi_1\ldots\varphi_p}\varphi_1\otimes\ldots\otimes\varphi_p:\varphi_1,\ldots,\varphi_p\in V^\sim\right\}=\mathrm{Mult}_p(V,\Gamma)}$ (i.e.: Menge aller LK von $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$).
<u>Bew.:</u> (1) $\otimes^p V^\sim\subseteq\mathrm{Mult}_p(V,\Gamma)$ weil $(\varphi_1\otimes\ldots\otimes\varphi_p)(v_1,\ldots,v_p)\overset{\text{def}}{=}\varphi_1(v_1)\ldots\varphi_p(v_p)$;
(2) $\mathrm{f}\left(E_{\alpha_1},\ldots,E_{\alpha_p}\right)=f_{\alpha_1\ldots\alpha_p}=f_{\gamma_1\ldots\gamma_p}\delta_{\alpha_1}^{\gamma_1}\ldots\delta_{\alpha_p}^{\gamma_p}\overset{\text{def}}{=}f_{\gamma_1\ldots\gamma_p}\,\mathrm{e}^{\gamma_1}(E_{\alpha_1})\ldots\mathrm{e}^{\gamma_p}\left(E_{\alpha_p}\right)\overset{\text{def}}{=}\left(f_{\gamma_1\ldots\gamma_p}(\mathrm{e}^{\gamma_1}\otimes\ldots\otimes\mathrm{e}^{\gamma_p})\right)\left(E_{\alpha_1},\ldots,E_{\alpha_p}\right)\Longrightarrow$
$f=f_{\gamma_1\ldots\gamma_p}(\mathrm{e}^{\gamma_1}\otimes\ldots\otimes\mathrm{e}^{\gamma_p})\in\otimes^p V^\sim\Longrightarrow\mathrm{Mult}_p(V,\Gamma)\subseteq\otimes^p V^\sim$; aus (1) und (2) $\Longrightarrow\boxed{\otimes^p V^\sim=\mathrm{Mult}_p(V,\Gamma)}$ ■</td></tr>
</table>

Tensor-Transformationsverhalten (a.k.a: Was ist also jetzt ein Tensor?)

<table>
<tr><td>kovariant, kontravaiant</td><td>• Index unten ⇔ „kovariant“ (wie die Basisvektoren), Index oben ⇔„kontravariant“ (entgegen den Basisvektoren).
• Anschaulich: „kontravariante Größen werden kleiner, wenn kovarianten Größen wachsen, und umgekehrt“.
• Die <u>Basisvektoren</u> E_i des Basisraums V sind <u>ko</u>variant.
• Die <u>Koordinaten v^i von Vektoren im Basisraum</u> ($v=v^iE_i$) sind <u>kontra</u>variant.
• Die <u>Basisvektoren e^i des Dualraums</u> $V^\sim$ sind <u>kontra</u>variant.
• Die <u>Koordinaten φ_i von Vektoren im Dualraum</u> ($\varphi=\varphi_ie^i$) sind <u>ko</u>variant.</td></tr>
<tr><td>Definition Tensor T</td><td>$T\in\otimes_q^pV=(\otimes^pV)\otimes(\otimes^qV^\sim)=\mathrm{Mult}_{p,q}(V,V^\sim,\Gamma)=\left\{T:\underbrace{V^\sim\times\ldots\times V^\sim}_{p-mal}\times\underbrace{V\times\ldots\times V}_{q-mal}\to\Gamma:\text{lin. in jedem Arg.}\right\}$
$T:\varphi_1,\ldots,\varphi_p,v_1,\ldots,v_q\mapsto\mathrm{T}(\varphi_1,\ldots,\varphi_p,v_1,\ldots,v_q)\in\Gamma$
p … Anzahl duale Vektoren $\varphi_1,\ldots,\varphi_p\in V^\sim$, die der Tensor als Input nimmt. Achtung: Er besteht daher aus p Vektoren $\in V$!
q … Anzahl Vektoren $v_1,\ldots,v_q\in V$, die der Tensor als Input nimmt. Achtung: Er besteht daher aus q Dualvektoren $\in V^\sim$!</td></tr>
<tr><td>Basis</td><td>Sei $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Basis in V und $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ die entspr. Dualbasis in $V^\sim$ (E_α und e_α sind Basisvektoren in V und $V^\sim$, α ist Zählindex)
Dann ist $E_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes E_{\alpha_p}\otimes e^{\beta_1}\ldots\otimes e^{\beta_q}$ eine Basis von $\otimes_q^pV$ und $T=T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q}E_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes E_{\alpha_p}\otimes e^{\beta_1}\ldots\otimes e^{\beta_q}$</td></tr>
<tr><td>Basistransformation</td><td>Sei $\left(\tilde{E}_\alpha\right)_{\alpha\in I}$ eine andere Basis in V und $(\tilde{e}_\alpha)_{\alpha\in I}$ die entsprechende Dualbasis in $V^\sim$. Wir definieren folgende Transformationen:
$\boxed{\tilde{E}_\alpha=\Lambda^\beta{}_\alpha E_\beta}$ … (1); $\boxed{E_\beta=\Sigma^\alpha{}_\beta\tilde{E}_\alpha}$ … (2) $\overset{(1)}{\Rightarrow}\tilde{E}_\alpha=\Lambda^\beta{}_\alpha\Sigma^\gamma{}_\beta\tilde{E}_\gamma\Longrightarrow\tilde{E}_\alpha=\Lambda^\beta{}_\alpha\Sigma^\gamma{}_\beta\tilde{E}_\gamma=\delta_\alpha^\gamma\tilde{E}_\gamma\Longrightarrow\boxed{\Lambda^\beta{}_\alpha\Sigma^\gamma{}_\beta=\delta_\alpha^\gamma}$ … (3)
$\tilde{e}^\alpha=\Xi^\alpha{}_\beta e^\beta$ … (4)$\vert\tilde{E}_\gamma\Longrightarrow\tilde{e}^\alpha(\tilde{E}_\gamma)=(\Xi^\alpha{}_\beta e^\beta)(\tilde{E}_\gamma)\Longrightarrow\delta_\gamma^\alpha\overset{lin.}{=}\Xi^\alpha{}_\beta\,e^\beta(\tilde{E}_\gamma)\overset{(1)}{=}\Xi^\alpha{}_\beta\,e^\beta(\Lambda^\delta{}_\gamma E_\delta)\overset{lin.}{=}\Xi^\alpha{}_\beta\Lambda^\delta{}_\gamma\,e^\beta(E_\delta)\Longrightarrow$
$\delta_\gamma^\alpha=\Xi^\alpha{}_\beta\Lambda^\delta{}_\gamma\delta_\delta^\beta\overset{(3)}{\Rightarrow}\Lambda^\beta{}_\gamma\Sigma^\alpha{}_\beta=\Xi^\alpha{}_\beta\Lambda^\delta{}_\gamma\delta_\delta^\beta\Longrightarrow\Lambda^\beta{}_\gamma\Sigma^\alpha{}_\beta=\Xi^\alpha{}_\beta\Lambda^\beta{}_\gamma\Longrightarrow\Sigma^\alpha{}_\beta=\Xi^\alpha{}_\beta\Longrightarrow\boxed{\tilde{e}^\alpha=\Sigma^\alpha{}_\beta e^\beta}$ … (5) $\Longrightarrow$
$\boxed{e^\alpha=\Lambda^\alpha{}_\beta\tilde{e}^\beta}$ … (6)</td></tr>
<tr><td>Tensortransformationsverhalten</td><td>$T=T^{\gamma_1\ldots\gamma_p}{}_{\delta_1\ldots\delta_q}E_{\gamma_1}\otimes\ldots\otimes E_{\gamma_p}\otimes e^{\delta_1}\ldots\otimes e^{\delta_q}=\tilde{T}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q}\tilde{E}_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes\tilde{E}_{\alpha_p}\otimes\tilde{e}^{\beta_1}\ldots\otimes\tilde{e}^{\beta_q}\overset{(2)}{\Rightarrow}$
$T=T^{\gamma_1\ldots\gamma_p}{}_{\delta_1\ldots\delta_q}(\Sigma^{\alpha_1}{}_{\gamma_1}\tilde{E}_{\alpha_1})\otimes\ldots\otimes\left(\Sigma^{\alpha_p}{}_{\gamma_p}\tilde{E}_{\alpha_p}\right)\otimes(\Lambda^{\delta_1}{}_{\beta_1}\tilde{e}^{\beta_1})\ldots\otimes\left(\Lambda^{\delta_q}{}_{\beta_q}\tilde{e}^{\beta_q}\right)\overset{lin.}{\Longrightarrow}$
$T=\Sigma^{\alpha_1}{}_{\gamma_1}\ldots\Sigma^{\alpha_p}{}_{\gamma_p}\Lambda^{\delta_1}{}_{\beta_1}\Lambda^{\delta_q}{}_{\beta_q}T^{\gamma_1\ldots\gamma_p}{}_{\delta_1\ldots\delta_q}\tilde{E}_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes\tilde{E}_{\alpha_p}\otimes\tilde{e}^{\beta_1}\ldots\otimes\tilde{e}^{\beta_q}$
$\boxed{\tilde{T}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q}=\Sigma^{\alpha_1}{}_{\gamma_1}\ldots\Sigma^{\alpha_p}{}_{\gamma_p}\Lambda^{\delta_1}{}_{\beta_1}\Lambda^{\delta_q}{}_{\beta_q}T^{\gamma_1\ldots\gamma_p}{}_{\delta_1\ldots\delta_q}}$… Tensortransformationsverhalten (setzt Basis voraus)
„Münchhausendefinition“: Ein Tensor ist ein Tensor, wenn er wie ein Tensor transformiert.</td></tr>
</table>

Abstrakte Indexschreibweise nach Penrose

Konventionen	• Abstrakte Indizes werden in kleinen lateinischen Buchstaben a, b, c ... geschrieben. Sie repräsentieren keine Zahl und keinen Zählindex, sondern definieren die Art des Objekts. Hochgestellter abstrakter Index: $\in V$, tiefgestellt: $\in V^{\sim}$. Sie sind also eher wie „Vektorpfeile" zu verstehen. Vektoren mit abstrakten Indizes sind <u>nicht</u> basisbezogen. • Konkrete Indizes (Zählindizes) werden entweder mit griechischen Buchstaben α, β, γ ... oder lateinischen Buchstaben $i, j, k, l, m, \ldots$ dargestellt. Sie repräsentieren konkrete Zahlen und sind basisbezogen. Ein einzelner Index α ohne zusätzlichen abstrakten Index steht z.B. für das α-te Element eines Zahlentupels. Ein Vektor v^{α} stellte einen Koordinatenvektor dar. • Indizes, die Teil der Bezeichnung sind (z.B. erster und zweiter Parameter), werden über das Objekt geschrieben.
Beispiele abstrakte Indizes	Vergleich Koordinatenindexschreibweise → abstrakte Indexschreibwese (wobei $v, w, E \in V;\ \varphi, e \in V^{\sim};\ v^{\alpha} \in \Gamma$): • $v \to v^a$ Der hochgestellte abstrakte Index a zeigt an, dass v ein Vektor aus V ist. • $\varphi \to \varphi_a$ Der tiefgestellte abstrakte Index a zeigt an, dass φ ein Dualvektor aus $V^{\sim}$ ist. • $v \otimes w \to v^a w^b$ Ein Tensor der Stufe 2 • $\varphi(v) = \mathrm{v}(\varphi) \to \varphi_a v^a = v^a \varphi_a$ Die Notation macht keinen Unterschied zwischen $\varphi(v)$ und $\mathrm{v}(\varphi)$, und integriert somit den natürlichen Isomorphismus $v \in V \cong (V^{\sim})^{\sim}$ (die kanonische Paarung $\langle\varphi, \mathrm{v}\rangle$). • $T \in \otimes_q^p V \to T^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_q}$ Durch die Anzahl und Stellung der abstrakten Indizes ist die Art des Tensors eindeutig definiert. • $\mathrm{T}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p, v_1, \ldots, v_q) \in \otimes_q^p V \to T^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_q} \overset{1}{\varphi}_{a_1} \ldots \overset{p}{\varphi}_{a_p} \overset{1}{v}^{b_1} \ldots \overset{q}{v}^{b_q}$
Mischung konkrete und abstrakte Indizes	• $v = v^{\alpha} E_{\alpha} \to v^a = v^{\alpha} E_{\alpha}^a$ Der hochgestellte abstrakte Index a bei E_{α}^a zeigt an, dass E ein (Basis-)Vektor aus V ist. Der hochgestellte Zählindex α bei v^{α} zeigt an, dass die Vektorkoordinate v^{α} skalar ist, und sich kontravariant verhält. Der tiefgestellte Zählindex α bei E_{α}^a zeigt an, dass jeweils der α-te Basisvektor E mit v^{α} zu multiplizieren ist. • $\tilde{v}^i = v^a e_a^i$ • $e^{\alpha}(E_{\beta}) = \delta_{\beta}^{\alpha} \to e_a^{\alpha} E_{\beta}^a = \delta_{\beta}^{\alpha}$ (Dualitätsrelation) • $v^i = v^a e_a^i$ Die duale Basis e_a^i „erzeugt" die Koordinaten v^i.

(Minkowski)-Metrik und Lorentz-Transformationen

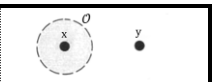
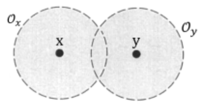
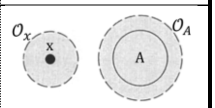
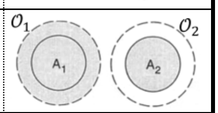
Definition	Der metrische Tensor dient dazu, mathematische Räume, insbesondere differenzierbare Mannigfaltigkeiten, mit einem Maß für Abstände und Winkel auszustatten. $\eta_{ab} \in \otimes_2^0 V = \otimes_0^2 V^{\sim}$
Minkowski	$\eta_{ab} E_{\alpha}^a E_{\beta}^b = \eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$
Eigenschaften	Seien E_{α}^a und $\tilde{E}_{\alpha}^a$ ONB's mit der Transformation $\tilde{E}_{\alpha}^a = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha} E_{\beta}^a$ $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{ab} E_{\alpha}^a E_{\beta}^b = \eta_{ab} \tilde{E}_{\alpha}^a \tilde{E}_{\beta}^b = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$...nur bei ONB! $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{ab} \tilde{E}_{\alpha}^a \tilde{E}_{\beta}^b = \eta_{ab} (\Lambda^{\gamma}{}_{\alpha} E_{\gamma}^a)(\Lambda^{\delta}{}_{\beta} E_{\delta}^b) = \Lambda^{\gamma}{}_{\alpha} \Lambda^{\delta}{}_{\beta} \eta_{ab} E_{\gamma}^a E_{\delta}^b = \Lambda^{\gamma}{}_{\alpha} \Lambda^{\delta}{}_{\beta} \eta_{\gamma\delta}$ ... Lorentz-Trafo (macht aus einer ONB eine ONB)

Topologie

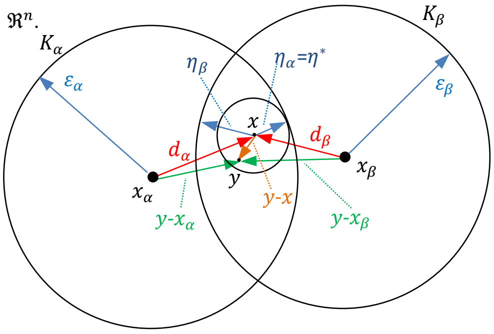
Gerade	• Eine **Gerade** ist eine autoparallele Kurve (Tangentialvektoren sind immer parallel) • Eine **Gerade** ist eine geodätische Kurve (kürzeste Verbindung zweier Punkte) Z.B. auf einer Kugeloberflächen sind Geraden Großkreissegmente (Schnittpunkt einer Ebene durch den Kugelmittelpunkt mit der Kugeloberfläche)
Menge	Eine Menge ist ein Verbund von Elementen (keine Doppeleinträge, Reihenfolge egal). Z.B.: $A = \{1,7,3\}; B = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$
Familie	Wenn abzählbar: Liste (Doppeleinträge erlaubt, Reihenfolge wichtig). Wenn überabzählbar: Funktionsartig. z.B.: F= $(0,1,1,3,2); G = (a_i)_{i \in I}$ (I...Indexmenge)
Notation Abbildungen	$f: X \to Y$ bezeichnet eine Abbildung, die von der Menge X in die Menge Y abbildet, wobei <u>alle</u> Punkte aus X abgebildet werden (X ist Definitionsmenge), aber <u>nicht</u> alle Punkte in Y erreicht werden müssen (die Bildmenge kann <u>kleiner</u> sein als Y).
Potenzmenge	Die **Potenzmenge** $\mathrm{P}(X)$ einer Menge X ist die „Menge aller Teilmengen von X", inklusive der leeren Menge $\emptyset$ und der Menge X selber: $\mathrm{P}(X) = \{A: A \subseteq X\}$
Topologie	Eine **Topologie** $\mathfrak{X}$ zu Menge X ist ist eine Teilmenge der Potenzmenge von X, wenn sie mindestens die leere Menge $\emptyset$ und die Menge X selber enthält, sowie alle endlichen Schnittmengen und beliebige Vereinigungen von Elementen aus $\mathfrak{X}$. Mit anderen Worten: Sei X eine Menge, und $\mathrm{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Dann ist $\mathfrak{X} \subseteq X$ eine Topologie, wenn gilt: (1) $\emptyset \in \mathfrak{X}, X \in \mathfrak{X}$ ($\mathfrak{X}$ beinhaltet X and die leere Menge), (2) $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_n \in \mathfrak{X} \Longrightarrow \mathcal{O}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{O}_n \in \mathfrak{X}$ (ein endlicher Durchschnitt offener Mengen ist wieder $\in \mathfrak{X}$, und daher auch offen), (3) $(\mathcal{O}_{\alpha})_{\alpha \in I} \subseteq \mathfrak{X} \Longrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{O}_{\alpha} \in \mathfrak{X}$ ($\mathfrak{X}$ beinhaltet alle beliebigen Vereinigungen von Elementen $\{\mathcal{O}_{\alpha}: \alpha \in I\}$)
Topol. Raum	Sei X eine Menge und $\mathfrak{X}$ eine Topologie auf X. Dann nennt man das Paar $(X, \mathfrak{X})$ einen **topologischen Raum**.
offene Menge	Jede Teilmenge $\mathcal{O}$ eines topologischen Raums $(X, \mathfrak{X})$, die ein Element von $\mathfrak{X}$ ist, nennt man **offene (Teil-)Menge** von X
abgeschl. M.	Jede Teilmenge A eines topologischen Raums $(X, \mathfrak{X})$, für die gilt $X \backslash A \in \mathfrak{X}$, nennt man **abgeschlossene (Teil-)Menge** von X
offene Umgeb	Sei $x \in (X, \mathfrak{X})$, dann ist jede offene Menge $\mathcal{O} \in \mathfrak{X}$, für die gilt $x \in \mathcal{O}$ eine offene Umgebung von x.
Indiskrete Top	Die **indiskrete Topologie** auf die Menge X ist die „minimale" Topologie $\mathcal{I} = \{\emptyset, X\}$
Diskrete Top.	Die **diskrete Topologie** auf die Menge X ist die „maximale" Topologie $\vartheta = \mathrm{P}(X)$
Konvergenz einer Folge	Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (X, \mathfrak{X})$ **konvergiert** gegen x^*, wenn es zu <u>jeder</u> offenen Umgebung $\mathcal{O}$ von x^* einen Folgenindex N gibt, so dass für alle $n > N$ alle weiteren Folgenglieder $(x_n)_{n>N}$ Element von $\mathcal{O}$ bleiben: $x_n \to x^* \Longleftrightarrow (\forall \mathcal{O} \in \mathfrak{X}: x^* \in \mathcal{O}): \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N: x_n \in \mathcal{O}$ • In topologischen Räumen mit der indiskreten (gröbsten) Topologie $(X, \mathcal{I})$ konvergiert jede Folge gegen <u>jeden</u> Wert x^*, weil die einzig offene Umgebung jedes beliebigen x^* in der Topologie von $\mathcal{I} = \{\emptyset, X\}$ die Menge X selber ist. • In topologischen Räumen mit der diskreten (feinsten) Topologie (X, ϑ) konvergieren nur quasistatische Folgen (das sind Folgen, die ab einem gewissen Index $N > n$ einen konstanten Wert x_0 haben), da die Topologie ϑ insbesondere auch „besonders kleine Umgebungen" in Form von Einzelpunktmengen mit jeden Punkt $x_0 \in \vartheta$ beinhaltet. • Wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(X, \mathcal{T}_1)$ konvergiert, und $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$, dann konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch in $(X, \mathcal{T}_2)$

Urbild	Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung von X nach Y. Dann ist das **Urbild** $f^{-1}(B) \in X$ einer Teilmenge $B \subseteq Y$ die Menge aller Punkte in $x \in X$, so dass $f(x) \in B$: $f^{-1}(B) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X: f(x) \in B\}$. „Nur die x, die in B abgebildet werden, gehören zu $f^{-1}(B)$"
Stetigkeit	$f:(X,\mathfrak{X}) \to (Y,\mathfrak{Y})$ ist stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(\mathcal{O})$ aller offenen Mengen $\mathcal{O} \in \mathfrak{Y}$ wieder eine offene Menge $\in \mathfrak{X}$ ist: $f:(X,\mathfrak{X}) \to (Y,\mathfrak{Y})\ stetig \Leftrightarrow \forall \mathcal{O} \in \mathfrak{Y}: f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathfrak{X}$
Komposition stetiger Funktionen ist wieder stetig.	Sei $f:(X,\mathfrak{X}) \to (Y,\mathfrak{Y})$ stetig, $g:(Y,\mathfrak{Y}) \to (Z,\mathfrak{Z})$ stetig. Dann ist auch $g \circ f$ stetig, wobei $(g \circ f)(x) \overset{\text{def}}{=} g(f(x))$. z.Z.: $\boxed{f:(X,\mathfrak{X}) \to (Y,\mathfrak{Y}),\ g:(Y,\mathfrak{Y}) \to (Z,\mathfrak{Z})\ \text{stetig} \Leftrightarrow \forall \mathcal{O}_z \in \mathfrak{Z}: (g \circ f)^{-1}(\mathcal{O}_z) \in \mathfrak{X}}$. Beweis: $f:(X,\mathfrak{X}) \to (Y,\mathfrak{Y})\ stetig \Leftrightarrow \forall \mathcal{O}_y \in \mathfrak{Y}: f^{-1}(\mathcal{O}_y) \in \mathfrak{X}$ … (1) $\quad (g \circ f)^{-1}(\mathcal{O}_z) \overset{?}{\in} \mathfrak{X} \Rightarrow \underbrace{f^{-1}\left(\underbrace{g^{-1}(\mathcal{O}_z)}_{(2)\Rightarrow\in\mathfrak{Y}}\right)}_{(1)\Rightarrow\in\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$ ■ $g:(Y,\mathfrak{Y}) \to (Z,\mathfrak{Z})\ stetig \Leftrightarrow \forall \mathcal{O}_z \in \mathfrak{Z}: g^{-1}(\mathcal{O}_z) \in \mathfrak{Y}$ … (2)
Lemma $f^{-1}(B_1 \cap B_2)$	Sei $f:(X,\mathfrak{X}) \to (Y,\mathfrak{Y}); B_1, B_2 \subseteq Y$. Dann ist $\boxed{f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)}$ Beweis: $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ ■
Lemma $f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha)$	Sei $f:(X,\mathfrak{X}) \to (Y,\mathfrak{Y}); (B_\alpha)_{\alpha\in I} \subseteq P(Y)$. Dann ist $\boxed{f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)}$ Beweis: $x \in f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha \Leftrightarrow \exists \alpha_0: f(x) \in B_{\alpha_0} \Leftrightarrow \exists \alpha_0: x \in f^{-1}(B_{\alpha_0}) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$ ■
Topologisierung	Sei X eine Menge (ohne Topologie), und $f: X \to (Y,\mathfrak{Y})$ eine Abbildung. Dann kann mittels Abbildung f eine Topologie $\mathfrak{X}_f$ auf X erzeugt werden: $\mathfrak{X}_f \overset{\text{def}}{=} \{\mathcal{O}: \exists \mathcal{O}' \in \mathfrak{Y}: \mathcal{O} = f^{-1}(\mathcal{O}')\}$, oder einfacher: $\mathfrak{X}_f \overset{\text{def}}{=} \{f^{-1}(\mathcal{O}'): \mathcal{O}' \in \mathfrak{Y}\}$ … (1) „$\mathfrak{X}_f$ sind die Urbilder aller offenen Mengen in Y". Zu zeigen: $\mathfrak{X}_f$ ist eine Topologie. (i) $\emptyset = f^{-1}(\emptyset), X = f^{-1}(Y)$ ■ (ii) Sei $\mathcal{O}_1', \mathcal{O}_2' \in \mathfrak{Y}$ … (2) und $\mathcal{O}_1 = f^{-1}(\mathcal{O}_1'), \mathcal{O}_2 = f^{-1}(\mathcal{O}_2')$ … (3) $\overset{(1)}{\Rightarrow} \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathfrak{X}_f$ … (4) $\mathcal{O}_1', \mathcal{O}_2' \in \mathfrak{Y} \xRightarrow{\mathfrak{Y}\text{ ist Topologie}} \mathcal{O}_1' \cap \mathcal{O}_2' \in \mathfrak{Y} \overset{(1)}{\Rightarrow} f^{-1}(\mathcal{O}_1' \cap \mathcal{O}_2') \in \mathfrak{X}_f \xRightarrow{(Lemma)} f^{-1}(\mathcal{O}_1') \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2') \in \mathfrak{X}_f \overset{(3)}{\Rightarrow} \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in \mathfrak{X}_f$ ■ (iii) Sei $(\mathcal{O}_\alpha')_{\alpha\in I} \subseteq \mathfrak{Y}$ … (5) und $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in I} = f^{-1}(\mathcal{O}_\alpha')$ … (6) $\overset{(1)}{\Rightarrow} (\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in I} \subseteq \mathfrak{X}_f$ … (7) $(\mathcal{O}_\alpha')_{\alpha\in I} \subseteq \mathfrak{Y} \xRightarrow{\mathfrak{Y}\text{ ist Topologie}} \bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{O}_\alpha' \in \mathfrak{Y} \overset{(1)}{\Rightarrow} f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{O}_\alpha') \in \mathfrak{X}_f \xRightarrow{(Lemma)} \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(\mathcal{O}_\alpha') \in \mathfrak{X}_f \overset{(6)}{\Rightarrow} \bigcup_{\alpha\in I} (\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in I} \in \mathfrak{X}_f$ ■
Teilmengentopologie	Sei $U \subseteq X$ eine Teilmenge des Topologischen Raums $(X,\mathfrak{X})$. Die **Teilmengentopologie** (auch: **Teilraumtopologie, induzierte Topologie, Spurtopologie**) ist die natürliche Struktur, die die Teilmenge U vom topologischen Raum $(X,\mathfrak{X})$ „erbt". Eine Abbildung $i_u: U \to X; x \in U \to x \in X$ *(„Punkt wird auf sich selber abgebildet" - Einbettung)* induziert die Topologie $\mathfrak{X}_{i_u} = i_u^{-1}(\mathfrak{X}) = \{i_u^{-1}(\mathcal{O}): \mathcal{O} \in \mathfrak{X}\}$ … (1) Abb. „auf sich selber": $x \in i_u^{-1}(\mathcal{O}) = i_u(x) \Leftrightarrow x \in U \cap \mathcal{O}$ … (2) $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\boxed{\mathfrak{X}_{i_u} = \{\mathcal{O}': \mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap U \wedge \mathcal{O} \in \mathfrak{X}\} = \{\mathcal{O} \cap U: \mathcal{O} \in \mathfrak{X}\}}$ Jede Teilmenge U ist in Bezug auf die Spurtopologie $\mathfrak{X}_{i_u}$ offen.
Homöomorph	Ein **Homöomorphismus** bezeichnet eine bijektive, stetige Abbildung f zwischen zwei topologischen Räumen, deren Umkehrabbildung g ebenfalls stetig ist. Zwei topologische Räume heißen **homöomorph**, wenn sie durch einen Homöomorphismus (topologische Abbildung) ineinander überführt werden können. Sei (i) $f:(X,\mathfrak{X}) \to (Y,\mathfrak{Y})$ eine Abbildung, (ii) $g:(Y,\mathfrak{Y}) \to (X,\mathfrak{X})$ deren Umkehrabbildung; (iii) f, g stetig; (iv) $g \circ f = \mathrm{id}_x$; (v) $f \circ g = \mathrm{id}_y$ (stetige, bijektive Abb. - invertierbar), dann ist $(X,\mathfrak{X})$ **homöomorph** zu $(Y,\mathfrak{Y})$. $f^{-1}(\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X};\ g^{-1}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{Y} \Leftrightarrow f$ ist ein-eindeutig zwischen offenen Mengen in X und Y. $\Leftrightarrow$ Die beiden Räume sind topologisch nicht unterscheidbar $\Leftrightarrow \mathfrak{X} \overset{1:1}{\leftrightarrow} \mathfrak{Y} \Leftrightarrow (X,\mathfrak{X}) \cong (Y,\mathfrak{Y})$

Trennungsaxiome

Trennungsaxiome in $(X,\mathfrak{X})$	T_0	Für zwei <u>beliebige</u> Punkte $x, y \in X$ $(x \neq y)$ gibt es <u>immer</u> eine offene Menge $\mathcal{O} \in \mathfrak{X}$, die den einen Punkt beinhaltet, nicht jedoch den anderen Punkt (Es muss also <u>nur eine Menge $\mathcal{O}$</u> geben). $\forall\, x, y \in (X,\mathfrak{X}): x \neq y \Rightarrow (\exists\, \mathcal{O} \in \mathfrak{X}: x \in \mathcal{O} \wedge y \notin \mathcal{O}) \vee (\exists\, \mathcal{O} \in \mathfrak{X}: y \in \mathcal{O} \wedge x \notin \mathcal{O})$	
	T_1	Für zwei <u>beliebige</u> Punkte $x, y \in X$ $(x \neq y)$ gibt es <u>immer</u> eine offene Menge $\mathcal{O}_x \in \mathfrak{X}$, die den Punkt x beinhaltet <u>und</u> eine offene Menge $\mathcal{O}_y \in \mathfrak{X}$, die den Punkt y beinhaltet (Es gibt also <u>zwei Menge $\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y$, die sich auch überschneiden dürfen</u>): $\forall\, x, y \in (X,\mathfrak{X}): x \neq y \Rightarrow (\exists\, \mathcal{O}_x \in \mathfrak{X}: x \in \mathcal{O}_x \wedge y \notin \mathcal{O}_x) \wedge (\exists\, \mathcal{O}_y \in \mathfrak{X}: y \in \mathcal{O}_y \wedge x \notin \mathcal{O}_y)$	
	T_2	„<u>Hausdorff-Raum</u>": Für zwei <u>beliebige</u> Punkte $x, y \in X$ $(x \neq y)$ gibt es <u>immer</u> zwei <u>disjunkte</u> offene Mengen $\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y \in \mathfrak{X}$, so dass die offene Menge $\mathcal{O}_x$ den Punkt x beinhaltet <u>und</u> die offene Menge $\mathcal{O}_y$ den Punkt y beinhaltet (Es gibt also <u>2 Mengen $\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y$, die sich nicht überschneiden dürfen</u>). Sei $x, y \in (X,\mathfrak{X}); \mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y \in \mathfrak{X}; x \neq y$. Dann gilt $\forall\, x, y \in (X,\mathfrak{X}): x \neq y \Rightarrow$ $(\exists\, \mathcal{O}_x \in \mathfrak{X}: x \in \mathcal{O}_x \wedge y \notin \mathcal{O}_x) \wedge (\exists\, \mathcal{O}_y \in \mathfrak{X}: y \in \mathcal{O}_y \wedge x \notin \mathcal{O}_y) \wedge (\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \emptyset)$	
	T_3	„regulär": Für <u>jeden beliebigen Punkt</u> $x \in X$ und <u>jede abgeschlossene Menge</u> $A \in X$, die x nicht beinhaltet, gibt es immer <u>zwei disjunkte offene Mengen</u> $\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_A \in \mathfrak{X}$, so dass <u>$\mathcal{O}_x$ den Punkt x</u> beinhaltet, und <u>$\mathcal{O}_A$ die abgeschlossene Menge A</u>. $\forall x \in (X,\mathfrak{X}); \forall A = \{A \subseteq X: x \notin A \wedge X\backslash A \in \mathfrak{X}\}$ $\Rightarrow (\exists\, \mathcal{O}_x, \mathcal{O}_A \in \mathfrak{X}: x \in \mathcal{O}_x \wedge A \subseteq \mathcal{O}_A \wedge \mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_A = \emptyset)$	
	T_4	„normal": Für <u>zwei beliebige disjunkte, abgeschlossene Mengen</u> $A_1, A_2 \in X$ gibt es <u>immer zwei disjunkte offene Mengen</u> $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathfrak{X}$, so dass <u>$A_1$ in $\mathcal{O}_1$ und A_2 in $\mathcal{O}_2$ enthalten</u> ist. $\forall A_1, A_2: (A_1 \cap A_2 = \emptyset \wedge X\backslash A_1 \in \mathfrak{X} \wedge X\backslash A_2 \in \mathfrak{X}) \Rightarrow$ $\exists \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2: (\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset \wedge A_1 \subseteq \mathcal{O}_1 \wedge A_2 \subseteq \mathcal{O}_2 \wedge \mathcal{O}_1 \in \mathfrak{X} \wedge \mathcal{O}_2 \in \mathfrak{X})$	
Eigenschaften von T_1		(i) T_1 impliziert T_0. (ii) In T_1 ist jede Ein-Punkt-Menge abgeschlossen. Beh.: $\forall\, x \in (X,\mathfrak{X}) \Rightarrow \{x\}$ abgeschlossen $\Leftrightarrow X\backslash\{x\} \in \mathfrak{X}$ … (1) $(y \neq x \Leftrightarrow y \in X\backslash\{x\}) \overset{T_1}{\Rightarrow} (\exists\, \mathcal{O}_y \in \mathfrak{X}: y \in \mathcal{O}_y \wedge x \notin \mathcal{O}_y) \Rightarrow \{y\} \subseteq \mathcal{O}_y \subseteq X\backslash\{x\}\ \forall\, y \in X\backslash\{x\}$ … (2) $X\backslash\{x\} = \bigcup_{y\in X\backslash\{x\}}\{y\} \subseteq \bigcup_{y\in X\backslash\{x\}}\{\mathcal{O}_y\} \subseteq X\backslash\{x\} \Rightarrow X\backslash\{x\} = \bigcup_{y\in X\backslash\{x\}}\{\mathcal{O}_y\}$	
Eigenschaften von T_2		(i) T_2 impliziert T_1. (ii) In T_2 hat jede konvergente Folge genau einen Grenzwert. Beweis: Ann.: $x_n \to x$ … (1) $x_n \to y$ … (2). $z.Z.: x = y$. Ann. Gegenteil: $x \neq y$ … (3) $T_2 \Rightarrow (\exists\, \mathcal{O}_x \in \mathfrak{X}: x \in \mathcal{O}_x \wedge y \notin \mathcal{O}_x)$ … (4) $T_2 \Rightarrow (\exists\, \mathcal{O}_y \in \mathfrak{X}: y \in \mathcal{O}_y \wedge x \notin \mathcal{O}_y)$ … (5) $T_2 \Rightarrow \mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \emptyset$ … (6) (1),(4) $\Rightarrow \exists N: \forall n > N: x_n \in \mathcal{O}_x$ … (7) (2),(5) $\Rightarrow \exists \tilde{N}: \forall n > \tilde{N}: x_n \in \mathcal{O}_y$ … (8) (7),(8) $\Rightarrow \forall N: n > N \wedge n > \tilde{N} \Rightarrow x_n \in \mathcal{O}_x \wedge x_n \in \mathcal{O}_y \Rightarrow x_n \in \mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y$ ↯ zu (6) $\Rightarrow x = y$ ■	
sonstiges		$T_3 \wedge T_1$ implizieren T_2, $T_4 \wedge T_1$ implizieren T_3	

Standardtopologie von $\mathbb{R}^n$

offene ε-Kugel	$K(x,\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \{y\in\mathbb{R}^n: \lvert y-x\rvert<\varepsilon\}$; $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$; $\lvert x\rvert \overset{\text{def}}{=} \sqrt{x^2}$; $K_\alpha \overset{\text{def}}{=} K(x_\alpha,\varepsilon_\alpha)$
Standard-topologie.	Die Standardtopologie $\mathfrak{R}^n$ von $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{R}^n)$ ist: $\mathfrak{R}^n \overset{\text{def}}{=} \{\mathcal{O}: \mathcal{O} = \bigcup_{\alpha\in I} K_\alpha\}$ (alle möglichen Vereinigungen offener Kugeln) z.Z. $\mathfrak{R}^n$ ist eine Topologie. Bew.: (i) a) $\emptyset = (\bigcup_{\alpha\in\emptyset}\mathfrak{R}^n) \in \mathfrak{R}^n$ ✓; (i) b) Beh: $\mathbb{R}^n = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} K(0,N)$, Bew.: $\forall x\in\mathbb{R}^n\ \exists N_0\in\mathbb{N}: N_0>\lvert x\rvert \Longrightarrow$ $x\in K(0,N_0(x))\ \forall x\in\mathbb{R}^n$ ... (1) $K(0,N_0(x))\subseteq \bigcup_{N\in\mathbb{N}}K(0,N)\ \forall x\in\mathbb{R}^n$ ... (2) $\overset{(1)}{\Longrightarrow} x\in\bigcup_{N\in\mathbb{N}}K(0,N)\ \forall x\in\mathbb{R}^n$ ✓ „Jedes $x\in\mathbb{R}^n$ liegt in einer Kugel um den Nullpkt. mit Radius $N_0>\lvert x\rvert$, daher auch in der Vereinigung $\bigcup_{N\in\mathbb{N}}K(0,N)$" (ii) Beh.: $\mathcal{O}_1 = \bigcup_{\alpha\in I}K_\alpha$; $\mathcal{O}_2=\bigcup_{\beta\in J}K_\beta \Longrightarrow \mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2 = (\bigcup_{\gamma\in G}K_\gamma)\in\mathfrak{R}^n$. Trivialer Fall: $\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2=\emptyset\in\mathfrak{R}^n$ Nichttrivialer Fall: $\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2 = K_1\cap\ldots\cap K_n\neq\emptyset$ $d_\alpha = \lvert x-x_\alpha\rvert < \varepsilon_\alpha$; $d_\beta = \lvert x-x_\beta\rvert<\varepsilon_\beta$ ... (3) $\eta_\alpha = \varepsilon_\alpha - d_\alpha$; $\eta_\beta = \varepsilon_\beta-d_\beta$; $\eta^* = \min(\eta_\alpha,\eta_\beta)$ ... (4)  Beweise, dass alle $y\in K(x,\eta^*)$ immer in $K_\alpha\cap K_\alpha$ liegen: $\lvert\vec y-\vec x_\alpha\rvert = \lvert(\vec y-\vec x)+(\vec x-\vec x_\alpha)\rvert \le \lvert\vec y-\vec x\rvert + \lvert\vec d_\alpha\rvert$ | $\eta^*>y-x$ $\lvert\vec y-\vec x_\alpha\rvert\le\eta^*+d_\alpha\le\varepsilon_\alpha \Longrightarrow \lvert\vec y-\vec x_\alpha\rvert\le\varepsilon_\alpha \Longrightarrow y\in K_\alpha$ ... (5a) $\lvert\vec y-\vec x_\beta\rvert = \lvert(\vec y-\vec x)+(\vec x-\vec x_\beta)\rvert \le \lvert\vec y-\vec x\rvert + \lvert\vec d_\beta\rvert$ | $\eta^*>y-x$ $\lvert\vec y-\vec x_\beta\rvert\le\eta^*+d_\beta\le\varepsilon_\beta \Longrightarrow \lvert\vec y-\vec x_\beta\rvert\le\varepsilon_\beta \Longrightarrow y\in K_\beta$ ... (5b) $(5a),(5b) \Longrightarrow y\in K_\alpha \wedge y\in K_\beta \Longrightarrow y\in K_\alpha\cap K_\beta \Longrightarrow K(x,\eta^*)\subseteq K_\alpha\cap K_\beta$ ... (6) $\{x\}\subseteq K(x,\eta^*) \overset{(6)}{\subseteq} K_\alpha\cap K_\beta \Longrightarrow$ $\bigcup_{x\in(K_\alpha\cap K_\beta)}\{x\} \subseteq \bigcup_{x\in(K_\alpha\cap K_\beta)} K(x,\eta^*) \subseteq \bigcup_{x\in(K_\alpha\cap K_\beta)}\{x\} \Longrightarrow$ $\bigcup_{x\in(K_\alpha\cap K_\beta)} K(x,\eta^*) = \bigcup_{x\in(K_\alpha\cap K_\beta)}\{x\}$ | $\bigcup_{x\in(K_\alpha\cap K_\beta)}\{x\} = (K_\alpha\cap K_\beta)$ $\Longrightarrow \bigcup_{x\in(K_\alpha\cap K_\beta)} K(x,\eta^*) = (K_\alpha\cap K_\beta)$ Da die Standardtopologie $\mathfrak{R}^n$ lt. Definition aber alle möglichen Vereinigungen aller möglichen offenen Kugeln beinhaltet, ist auch $\bigcup_{x\in(K_\alpha\cap K_\beta)} K(x,\eta^*)$ in der Topologie enthalten: $\bigcup_{x\in(K_\alpha\cap K_\beta)} K(x,\eta^*)\in\mathfrak{R}^n \Longrightarrow K_\alpha\cap K_\beta\in\mathfrak{R}^n$ ✓ (iii) *Beh.*: $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in I}\subseteq\mathfrak{R}^n \Leftrightarrow (\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{O}_\alpha)\in\mathfrak{R}^n$ ... (7) *z.Z.*: $(\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{O}_\alpha)\in\mathfrak{R}^n$ Jede offene Menge $\mathcal{O}_\alpha$ in $\mathfrak{R}^n$ besteht lt. Definition aus der Vereinigung von off. Kugeln: $\forall\alpha\in I\ \exists I_\alpha: \mathcal{O}_\alpha \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\beta\in I_\alpha}K_\beta \overset{(7)}{\Longrightarrow}$ Daher sind beliebige Vereinigungen von offenen Mengen $\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{O}_\alpha$ dasselbe wie beliebige Vereinigungen von beliebigen Vereinigungen offener Kugeln. $\bigcup_{\alpha\in I}(\bigcup_{\beta\in I_\alpha}K_\beta)$. Doch das ist wieder nur die Vereinigungen von (bestimmten) offenen Kugeln $\bigcup_{\gamma\in I_\gamma}K_\gamma$. Da die Standardtopologie $\mathfrak{R}^n$ lt. Definition aber alle möglichen Vereinigungen aller möglichen offenen Kugeln beinhaltet, ist $\bigcup_{\gamma\in I_\gamma}K_\gamma$ in der Topologie enthalten: $\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{O}_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}(\bigcup_{\beta\in I_\alpha}K_\beta) = \bigcup_{\gamma\in I_\gamma}K_\gamma \in\mathfrak{R}^n$ ✓

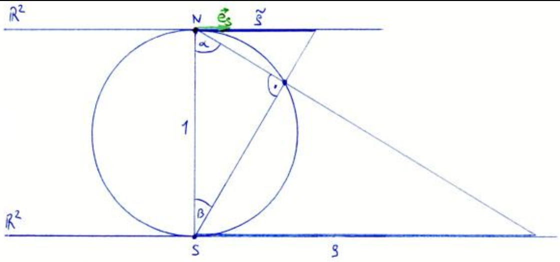
kompakt, parakompakt

kompakt	Ein topologischer Raum $(X,\mathfrak{X})$ ist kompakt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: (i) $(X,\mathfrak{X})$ ist T_2 (ii) $\forall(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in I}\subseteq\mathfrak{X}: \bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{O}_\alpha = X \Longrightarrow \exists\mathcal{O}_{\alpha_1},\ldots,\mathcal{O}_{\alpha_n}: \mathcal{O}_{\alpha_1}\cup\ldots\cup\mathcal{O}_{\alpha_n} = X$ „Für jede offene Überdeckung $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in I}$, die ganz X abdeckt, kann ich mit einer endlichen Teilmenge $\{\mathcal{O}_{\alpha_1},\ldots,\mathcal{O}_{\alpha_n}\}$ aus dieser Überdeckung wieder eine Überdeckung von X erreichen
parakompakt	„Für jede Überdeckung $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in I}$, die ganz X abdeckt, kann ich mit einer endlichen Teilmenge $\{\mathcal{O}_{\alpha_1},\ldots,\mathcal{O}_{\alpha_n}\}$ aus dieser Überdeckung eine Überdeckung einer offenen Teilmenge U_0 erreichen

(Differenzierbare) Mannigfaltigkeiten

Mannig-faltigkeit	Der topologische Raum $(M,\mathfrak{M})$ ist eine **Mannigfaltigkeit**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: (i) $(M,\mathfrak{M})$ ist T_2 (ii) $(M,\mathfrak{M})$ ist parakompakt (iii) $(M,\mathfrak{M})$ ist lokal in der offenen Umgebung $\mathcal{O}\subseteq M$ (mit „geerbter" Spurtopologie) homöomorph zu $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{R}^n)$: $\forall p\in M\ \exists\ \mathcal{O}\in\mathfrak{M}: (\mathcal{O},\mathcal{O}\cap\mathfrak{M})\cong(\mathbb{R}^n,\mathfrak{R}^n)$
Karte	Sei p ein Punkt in $(M,\mathfrak{M})$, $\mathcal{O}\in\mathfrak{M}$ eine offene Umgebung von p, $\Phi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$; $\Phi: p\mapsto(x^1(p),\ldots,x^n(p))\in\mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus (bijektive, stetige Abbildung) zwischen $\mathcal{O}$ und (einer Teilmenge von) $\mathbb{R}^n$ (Φ erzeugt lokale Koordinaten x^μ). Dann ist $(\mathcal{O},\Phi)$ eine **Karte** der offenen Umgebung $\mathcal{O}$ des Punktes p, und $\mathcal{O}$ die sogenannte **Kartenumgebung**.
Atlas	Ein **Atlas** A der Mannigfaltigkeit $(M,\mathfrak{M})$ ist eine Menge von Karten $(\mathcal{O}_\alpha,\Phi_\alpha)$, so dass die Vereinigung der Kartenumgebung die ganze Mannigfaltigkeit M abdeckt: $A=(\mathcal{O}_\alpha,\Phi_\alpha)_{\alpha\in I}: \bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{O}_\alpha = M$
Kartenwech-selabbildung	Seien $(\mathcal{O},\Phi)$, $(\tilde{\mathcal{O}},\tilde\Phi)$ Karten mit überschneidenden Kartenumgebungen $\mathcal{O}\cap\tilde{\mathcal{O}}\neq\emptyset$. Die Abbildungen Φ und $\tilde\Phi$ „erzeugen" für einen Punkt $p\in\mathcal{O}\cap\tilde{\mathcal{O}}$ die Koordinaten x^μ und $\tilde x^\mu\in\mathbb{R}^n$. Dann ist die **Kartenwechselabbildung** $\psi = \tilde\Phi\circ\Phi^{-1}: \Phi(\mathcal{O}\cap\tilde{\mathcal{O}})\to\tilde\Phi(\mathcal{O}\cap\tilde{\mathcal{O}})$; $\psi:(x^1,\ldots,x^n)\mapsto(\tilde x^1,\ldots,\tilde x^n)$ die Abbildung, die die Koordinaten x^μ in $\tilde x^\mu$ umwandelt. Die **Kartenwechselabbildungen reichen aus**, um die Mannigfaltigkeit $(M,\mathfrak{M})$ topologisch eindeutig zu beschreiben!
Dreifachdurch-schnittsbed.	Notationsdefinition: $\mathcal{O}_{\alpha\beta} = \mathcal{O}_\alpha\cap\mathcal{O}_\beta$; $\psi_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha\circ\Phi_\beta^{-1}$ (Kartenwechselabbildung von Koordinaten x_β^μ zu Koordinaten x_α^μ) **Dreifachdurchschnittsbedingung**: $\psi_{\alpha\gamma} = \psi_{\alpha\beta}\circ\psi_{\beta\gamma}$. Bew.: $\psi_{\alpha\gamma} = \psi_{\alpha\beta}\circ\psi_{\beta\gamma} = (\Phi_\alpha\circ\Phi_\beta^{-1})\circ(\Phi_\beta\circ\Phi_\gamma^{-1}) = \Phi_\alpha\circ(\Phi_\beta^{-1}\circ\Phi_\beta)\circ\Phi_\gamma^{-1} = \Phi_\alpha\circ\Phi_\gamma^{-1} = \psi_{\alpha\gamma}$ ■ Dreifachdurchschnittsbedingung („3DB") ausreichend. Bew.: $\psi_{\alpha\delta} = \psi_{\alpha\beta}\circ\psi_{\beta\gamma}\circ\psi_{\gamma\delta} \overset{3DB}{=} \psi_{\alpha\gamma}\circ\psi_{\gamma\delta} \overset{3DB}{=} \psi_{\alpha\delta}$ ■

Beispiel Kartenwechsel Kugeloberfläche



$\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi \Longrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \ldots (1)$

$\tan(\alpha) = \rho \ldots (2);\ \tan(\beta) = \tilde{\rho} \ldots (3) \Longrightarrow$

$\tilde{\rho} = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} \overset{(1)}{=} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{\tan(\alpha)} \overset{(2)}{=} \frac{1}{\rho} \ldots (4)$

$x^i = \rho e^i_\rho \overset{(4)}{=} \frac{1}{\tilde{\rho}} e^i_\rho \,\Big|\cdot \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}} \Longrightarrow x^i = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}^2} e^i_\rho \,\Big|\, e^i_\rho = \tilde{e}^i_\rho \Longrightarrow$

$x^i = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}^2} \tilde{e}^i_\rho \Longrightarrow \boxed{x^i = \frac{\tilde{x}^i}{\tilde{\rho}^2} = \frac{\tilde{x}^i}{|\tilde{x}|^2}}$; analog: $\boxed{\tilde{x}^i = \frac{x^i}{\rho^2} = \frac{x^i}{|x|^2}}$

$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) = (\tilde{x}, \tilde{y})$

Die Kugel S^2 hat zwei Umgebungen: $\mathcal{O}_1 = S^2 \backslash \{N\}$ und $\mathcal{O}_2 = S^2 \backslash \{S\}$. Beide sind homöomorph zu $\mathbb{R}^2$. Φ_1 projiziert S auf (0,0) („unteres $\mathbb{R}^2$" in Skizze), kann aber nicht N abbilden, Φ_2 projiziert N auf (0,0) („oberes $\mathbb{R}^2$" in Skizze), kann aber nicht S abbilden. Die Kartenwechselabbildungen können daher nur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ abbilden.

Diff.bare Mannigfaltigkeit

Eine (r-fach) **differenzierbare Mannigfaltigkeit** hat einen Atlas bei dem für alle Karten $(\mathcal{O}_i, \Phi_i)$, $(\mathcal{O}_j, \Phi_j)$ mit überschneidenden Kartenumgebungen gilt: $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \neq \emptyset \Longrightarrow \Phi_i, \Phi_j^{-1}$ ist (r-fach) stetig differenzierbar auf $\Phi_j(\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j)$ (sind C^r). Äquivalent: alle Kartenwechselabbildungen $\Psi_{\alpha\beta}$ sind C^r

Skalare Funktion auf M

Sei $F: M \to \mathbb{R}, p \mapsto \mathrm{F}(p)$ eine Abbildung, die jedem Punkt p der Mannigfaltigkeit $(M, \mathfrak{M})$ einen skalaren Wert zuordnet. Sei $A = (\mathcal{O}_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein Atlas von $(M, \mathfrak{M})$. Dann wandelt jede Karte $(\mathcal{O}_\alpha, \Phi_\alpha)$ Punkte einer Umgebung $\mathcal{O}_\alpha$ in Koordinaten x^i_α um. Zu diesen Koordinaten gibt es eine (zur Karte passende) Funktion $\mathrm{f}_\alpha(x^i_\alpha)$, die diesen Koordinaten $x^i_\alpha(p) = \Phi_\alpha(p)$ denselben skalaren Wert zuordnet wie $\mathrm{F}(p)$. $\mathrm{f}_\alpha(x^i_\alpha(p)) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{F}(p) \Longrightarrow \boxed{\mathrm{f}_\alpha(x^i_\alpha) = \mathrm{F}(\Phi_\alpha^{-1}(x^i_\alpha)) = \mathrm{F} \circ \Phi_\alpha^{-1}: \Phi_\alpha(\mathcal{O}_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$

Transformationsgesetz eines Skalars

Beh.: Falls $p \in \mathcal{O}_{\alpha\beta} \Longrightarrow \boxed{\mathrm{f}_\alpha(x^i_\alpha(p)) = \mathrm{f}_\beta(x^i_\beta(p))}$. Bew.: $\mathrm{f}_\beta = \mathrm{F} \circ \Phi_\beta^{-1} = \mathrm{F} \circ (\Phi_\alpha^{-1} \circ \Phi_\alpha) \circ \Phi_\beta^{-1} = (\mathrm{F} \circ \Phi_\alpha^{-1}) \circ (\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}) \Longrightarrow$

$\mathrm{f}_\beta = \mathrm{f}_\alpha \circ \psi_{\alpha\beta} \Longrightarrow \mathrm{f}_\beta(x^i_\beta) = \mathrm{f}_\alpha(\psi^i_{\alpha\beta}(x^k_\beta)) = \mathrm{f}_\alpha(x^i_\alpha) \overset{allg.}{\Longrightarrow} \boxed{\tilde{\mathrm{f}}(\tilde{x}^i) = \mathrm{f}(x^i)}$ ■

Gerade

Eine Gerade in der Karte $(\mathcal{O}, \Phi)$ ist gegeben mit $x^i = x^i_0 + tv^i$, wobei x^i_0 der Startpunkt der Geraden ist, und v^i dem Tangentenvektor („Geschwindigkeitsvektor") entspricht. Die korrespondierende Kurve in der Karte $(\tilde{\mathcal{O}}, \tilde{\Phi})$ ist i.A. keine Gerade: $\tilde{x}^i = \psi^i(x^k_0 + tv^k)$ mit Kartenwechselabbildung $\psi: x^i \mapsto \tilde{x}^i$, oder in einfacherer Notation: $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^k_0 + tv^k)$.

Äquivalenz von Kurven

Zwei Kurven $x^i_1(t), x^i_2(t)$ in einer Karte $(\mathcal{O}, \Phi)$ sind **äquivalent**, wenn sie (i) einen gemeinsamen Startpunkt $x^i_0 = x^i(0)$ haben, und (ii) der Tangentenvektor v^i beider Kurven am Startpunkt x^i_0 gleich ist:

$\boxed{x^i_1(t) \sim x^i_2(t) \Leftrightarrow \left(x^i_1(0) = x^i_2(0) = x^i_0\right) \wedge \left(v^i_1(0) \overset{\text{def}}{=} \dot{x}^i_1(0) = \dot{x}^i_2(0) \overset{\text{def}}{=} v^i_2(0) = v^i_0\right)} \ldots (1)$

Zwei äquivalente Kurven in einer Karte $(\mathcal{O}, \Phi)$ sind auch in einer anderen Karte $(\tilde{\mathcal{O}}, \tilde{\Phi})$ äquivalent:

$\boxed{x^i_1(t) \sim x^i_2(t) \Leftrightarrow \tilde{x}^i_1(t) \sim \tilde{x}^i_2(t)}$. Bew: Sei $\psi^i(x^k) = \tilde{x}^i(x^k) \ldots (2)$; $\psi: x^i \mapsto \tilde{x}^i$ die Kartenwechselabbildung.

(i) trivial: $x^i_1(0) = x^i_2(0) = x^i_0 \Longrightarrow \tilde{x}^i_1(0) = \tilde{x}^i_2(0) = \psi^i(x^k_0)$ ✓ (ii) (2) $\Longrightarrow \tilde{x}^i(x^k(t)) = \psi^i(x^k(t)) \Longrightarrow$

$\tilde{v}^i_1 = \dot{\tilde{x}}^i_1 = \frac{\partial}{\partial t}\psi^i(x^k(t)) = (\psi^i)'(x^m_1(t)) \cdot \dot{x}^k_1(t) = \frac{\partial \psi^i}{\partial x^k}(x^m_1(t)) \cdot \dot{x}^k_1(t) \overset{(2)}{=} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}(x^m_1(t)) \cdot \dot{x}^k_1(t)^* \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}(x^m_1(t)) \cdot v^k_1(t) \,\Big|\, t \overset{!}{=} 0 \Longrightarrow$

$\tilde{v}^i_1(0) = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}(x^m_1(0)) \cdot v^k_1(0) \overset{(1)}{=} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}(x^m_0) \cdot v^k_0 \ldots (3)$ analog: $\tilde{v}^i_2(0) = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}(x^m_2(0)) \cdot v^k_2(0) \overset{(1)}{=} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}(x^m_0) \cdot v^k_0 \overset{(3)}{\Rightarrow} \tilde{v}^i_1(0) = \tilde{v}^i_2(0)$ ✓

*Zum besseren Verständnis: Darstellung in Vektorschreibweise in $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{\tilde{v}} = \dot{\vec{\tilde{x}}} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{\psi}(\vec{x}(t)) = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}}(t) = \underbrace{D\vec{\psi}(\vec{x})}_{\substack{Fréchet- \\ Ableitung}} \cdot \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\dot{x}_1(t) + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\dot{x}_2(t) + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3}\dot{x}_3(t) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}\dot{x}_1(t) + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\dot{x}_2(t) + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}\dot{x}_3(t) \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1}\dot{x}_1(t) + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2}\dot{x}_2(t) + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3}\dot{x}_3(t) \end{pmatrix}$$

Trafo Tang.vektorkomponent.

$\Longrightarrow$ Vektorkomponenten v^k im Pkt $x^m_0 \cong p$ transformieren kontravariant*: (3) $\Longrightarrow \boxed{\tilde{v}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i(x^m_0)}{\partial x^k} v^k = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}\Big|_p v^k} = \underline{\underline{J}}^i_k(x^m_0)\, v^k$

*... Merke: kontravariante Transformation = "Tilde oben"

Trafo Basisvektoren

$\Longrightarrow$ Die Basisvektoren transformieren kovariant** (Penrose-Notation): $\boxed{\tilde{E}^a_\beta = \frac{\partial x^\alpha(\tilde{x}^\gamma_0)}{\partial \tilde{x}^\beta} E^a_\alpha} = \left(\underline{\underline{J}}^{-1}\right)^\alpha_\beta (x^\gamma_0)\, E^a_\alpha$ **..."Tilde unten"

Bew: $v^a = v^\alpha E^a_\alpha = \tilde{v}^\beta \tilde{E}^a_\beta \ldots (1)$ $\tilde{v}^\alpha = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha(x^\gamma_0)}{\partial x^\beta} v^\beta \overset{\tilde{v} \leftrightarrow v}{\Longrightarrow} v^\alpha = \frac{\partial x^\alpha(\tilde{x}^\gamma_0)}{\partial \tilde{x}^\beta} \tilde{v}^\beta \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{\partial x^\alpha(\tilde{x}^\gamma_0)}{\partial \tilde{x}^\beta} \tilde{v}^\beta E^a_\alpha = \tilde{v}^\beta \tilde{E}^a_\beta \overset{KV\ \tilde{v}^\beta}{\Longrightarrow} \tilde{E}^a_\beta = \frac{\partial x^\alpha(\tilde{x}^\gamma_0)}{\partial \tilde{x}^\beta} E^a_\alpha$ ■

Differential-operator

Definition: $\partial_i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^i}$ ... hängt von der jeweiligen Karte ab: $\partial_i|_{x^m_0} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x^m_0}$ und $\tilde{\partial}_i\big|_{\tilde{x}^m_0} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\Big|_{\tilde{x}^m_0}$

Trafo Diff.-operator ∂_i

$\boxed{\tilde{\partial}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i}\partial_k = \tilde{\partial}_i x^k \partial_k} = \left(\underline{\underline{J}}^{-1}\right)^k_i (x^m_0)\, \partial_k|_{x^m_0}$ *Bew.*: $\tilde{\partial}_i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial}{\partial x^k} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i}\partial_k$ (alles an der Stelle x^m_0)

Differentialoperatoren ∂_i transformieren wie Basisvektoren E_i kovariant $\Longrightarrow \partial_i$ <u>sind</u> Basisvektoren

Trafo Vektorkomponenten

$v^a = v^k \underbrace{\partial^a_k}_{Basis} = \tilde{v}^i \tilde{\partial}^a_i = \tilde{v}^i \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i}\partial^a_k \overset{KV\ \partial^a_k}{\Longrightarrow} v^k = \tilde{v}^i \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \overset{\tilde{v} \leftrightarrow v}{\Longrightarrow} \boxed{\tilde{v}^k = v^i \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i}}$ ... Vektorkomponenten transformieren kontravariant

Felder auf Mannigfaltigkeiten

Tangential-raum	• ∂_i zeigt dasselbe Trafo-Verh. wie Basisvektoren $E_i^a \Longrightarrow$ Diff.operatoren ∂_i^a bilden Vektorraum in p (Tangentialraum T_pM)! • Transformation von Tangentialvektoren v^k (Vektoren in T_pM) in ∂_i-Schreibweise: $\tilde{v}^i = v^k \partial_k \rvert_{x_0^m} \tilde{x}^i$ $T_pM = \left\{ v^a = v^i \underbrace{\partial_i^a}_{Basis} \right\}$ mit $\partial_i^a \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big\rvert_p$ („Raum aller Richtungsableitungen im Punkt p“)
Vektorfeld	$v^a: M \to T_pM; p \mapsto v^a(p)$ in einer Karte: $v^a(p) = \underbrace{v^i(x^m)}_{Komponenten\ funktion} \partial_i^a$ Trafo Komponenten: $\tilde{v}^i(\tilde{x}^m) = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} v^i(x^m)$
Trafo Basis-vektoren	$\boxed{\tilde{\partial}_i^a = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \partial_k^a = \tilde{\partial}_i x^k \partial_k^a}$ (per Definition an der Stelle $\tilde{x}_0^m$ bzw. x_0^m; siehe vorige Seite)
Kotangential-raum	$T_pM^\sim$ bzw. $T_p^*M = \left\{ w_a = w_i \underbrace{dx_a^i}_{Kobasis} \right\}$ mit $\partial_i^a\, dx_a^j \overset{\text{def}}{=} \delta_i^j$ („Raum der linearen Funktionale, die jedem ∂_i^a eine Zahl zuordnen“)
Kovektorfeld	$w_a: M \to T_pM^\sim; p \mapsto w_a(p)$ in einer Karte: $w_a(p) = w_i(x^m)\, dx_a^i$ Trafo duale Komponenten: $\tilde{w}_i(\tilde{x}^m) = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} w_i(x^m)$
Trafo Ko-Basis-Vektoren	„totales Differential“ $\boxed{d\tilde{x}_a^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} dx_a^k = \partial_k \tilde{x}^i\, dx_a^k}$ (per Definition an der Stelle $\tilde{x}_0^m$ bzw. x_0^m)
Tensorfeld	$t^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}: M \to \otimes_s^r T_pM;\ p \mapsto t^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}(p)$ in einer Karte: $t^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s}(p) = \underbrace{t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(x^m)}_{Komponenten\ funktion} \cdot \underbrace{\partial^{a_1}_{i_1} \dots \partial^{a_r}_{i_r}}_{Basis\ r\ mal\ kovar.} \cdot \underbrace{dx^{j_1}_{b_1} \dots dx^{j_s}_{b_s}}_{Basis\ s\ mal\ kontravar.}$
Trafo Tensor-feld	$\tilde{t}^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(\tilde{x}^m) = \underbrace{\frac{\partial \tilde{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}}(x^m) \dots \frac{\partial \tilde{x}^{i_r}}{\partial x^{k_r}}(x^m)}_{Trafo: r\ mal\ kontravariant} \cdot \underbrace{\frac{\partial x^{l_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1}}(x^m) \dots \frac{\partial x^{l_s}}{\partial \tilde{x}^{j_s}}(x^m)}_{Trafo: s\ mal\ kovariant} t^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots l_s}(x^m)$

Koordinaten-kovariante Ableitungen ∂_a

Gradient eines Skalarfeldes $\mathcal{T}_0^0 \to \mathcal{T}_1^0$	Sei $F: M \to \mathbb{R};\ p \mapsto F(p)$ eine skalare Funktion auf der Mannigfaltigkeit M. Sei f die äquivalente Kartenfunktion f(x^k), die den Kartenkoordinaten $x^k(p)$ denselben skalaren Wert zuordnet wie F(p) Die Ableitung $\boxed{\partial_a \overset{\text{def}}{=} dx_a^i\, \partial_i}$: C$^\infty \to \mathcal{T}_1^0$(also $\mathcal{T}_0^0 \to \mathcal{T}_1^0$), angewandt auf F ist der Gradient des Skalarfeldes F. (1) ∂_a wird konkret in den Koordinaten einer bestimmten Kobasis berechnet: $\partial_a F = \overbrace{dx_a^i}^{Kobasis}\, \partial_i f \Longrightarrow$ ∂_i leitet die skalare Funktion f(x^k) nach x^i ab, und ordnet das Ergebnis dem jeweiligen i-ten Kobasisvektor dx_a^i zu. (2) Es ist egal, in welcher Karte (in welchen Koordinaten) der Gradient der skalaren Funktion gebildet wird; das Ergebnis (rücktransformiert auf die Mannigfaltigkeit) ist immer gleich (gilt nur für skalare Funktionen). $\boxed{\partial_a F = \tilde{\partial}_a F}$. Beweis: $dx_a^i\, \partial_i f \,\vert\, \partial_i = \partial_i \tilde{x}^k \tilde{\partial}_k \Longrightarrow \partial_a F = dx_a^i\, \partial_i \tilde{x}^k \tilde{\partial}_k \tilde{f} \overset{k \leftrightarrow i}{=} (\partial_k \tilde{x}^i\, dx_a^k) \tilde{\partial}_k \tilde{f} \,\vert\, \partial_k \tilde{x}^i\, dx_a^k = d\tilde{x}_a^i \Longrightarrow dx_a^i\, \partial_i f = d\tilde{x}_a^i\, \tilde{\partial}_i \tilde{f}$
Gradient eines Vektorfeldes $\mathcal{T}_0^1 \to \mathcal{T}_1^1$	$\partial_a v^b = \partial_a (v^i \partial_i^b) \overset{Leibniz}{=} (\partial_a v^i) \partial_i^b + v^i (\partial_a \partial_i^b) \,\vert\, \partial_a \partial_i^b = 0$, weil ∂_i^b Basisvektor $\Longrightarrow \boxed{\partial_a v^b = (\partial_a v^i) \partial_i^b}$
Differenzen-„tensor“ (Christoffel-Symbol)	Es ist <u>nicht</u> egal, in welcher Karte (in welchen Koordinaten) die koordinaten-kovariante Ableitung eines Vektorfeldes gebildet wird; die Ergebnisse (rücktransformiert auf die Mannigfaltigkeit) sind <u>unterschiedlich</u>. $\partial_a v^b = \partial_a (\tilde{v}^j \tilde{\partial}_j^b) \overset{Leibniz}{=} \left(\underline{\partial_a \tilde{v}^j}\right) \tilde{\partial}_j^b + \tilde{v}^j (\partial_a \tilde{\partial}_j^b) \,\vert\, \partial_a \tilde{v}^j = \tilde{\partial}_a \tilde{v}^j$, weil $\tilde{v}^j$ Skalar $\partial_a v^b = \tilde{\partial}_a \underline{\tilde{v}^j \tilde{\partial}_j^b} + \tilde{v}^j (\partial_a \tilde{\partial}_j^b) \,\vert\, \tilde{v}^j \tilde{\partial}_j^b = v^b \Longrightarrow \partial_a v^b = \tilde{\partial}_a v^b + \tilde{v}^j \left(\partial_a \underline{\tilde{\partial}_j^b}\right) \,\vert\, \tilde{\partial}_j^b = \tilde{\partial}_j x^k \partial_k^b$ $\partial_a v^b = \tilde{\partial}_a v^b + \tilde{v}^j \left(\underline{\partial_a (\tilde{\partial}_j x^k \partial_k^b)}\right) \overset{Leibniz}{=} \tilde{\partial}_a v^b + \tilde{v}^j \left(\partial_a (\tilde{\partial}_j x^k) \partial_k^b + \tilde{\partial}_j x^k\, \underline{\partial_a \partial_k^b}\right) \,\vert\, \partial_a \partial_k^b = 0$, weil ∂_k^b Basisvektor $\partial_a v^b = \tilde{\partial}_a v^b + \tilde{v}^j \underline{\partial_a (\tilde{\partial}_j x^k)} \partial_k^b \,\vert\, \partial_a (\tilde{\partial}_j x^k) = \tilde{\partial}_a (\tilde{\partial}_j x^k)$, weil $(\tilde{\partial}_j x^k)$ skalar $\partial_a v^b = \tilde{\partial}_a v^b + \tilde{v}^j \tilde{\partial}_a (\tilde{\partial}_j x^k) \underline{\partial_k^b} \,\vert\, \partial_k^b = \partial_k \tilde{x}^m \tilde{\partial}_m^b \Longrightarrow \partial_a v^b = \tilde{\partial}_a v^b + \tilde{v}^j \underline{\tilde{\partial}_a} (\tilde{\partial}_j x^k) \partial_k \tilde{x}^m \tilde{\partial}_m^b \,\vert\, \tilde{\partial}_a \overset{\text{def}}{=} d\tilde{x}_a^l\, \tilde{\partial}_l$ $\partial_a v^b = \tilde{\partial}_a v^b + \underline{\tilde{v}^j}\, d\tilde{x}_a^l\, \tilde{\partial}_l (\tilde{\partial}_j x^k) \partial_k \tilde{x}^m \tilde{\partial}_m^b \,\vert\, \tilde{v}^j = v^c\, d\tilde{x}_c^j$ (Dualbasis „erzeugt“ Koord.) $\partial_a v^b = \tilde{\partial}_a v^b + v^c \cdot \underline{[d\tilde{x}_c^j\, d\tilde{x}_a^l\, \tilde{\partial}_m^b \cdot \tilde{\partial}_l (\tilde{\partial}_j x^k) \cdot \partial_k \tilde{x}^m]}$ $\longrightarrow$ $\Gamma^b{}_{ca} = \underbrace{\left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial \tilde{x}^l \partial \tilde{x}^j} \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^k} \right)}_{2\ kovariante,\ 1\ kontravar.\ Wechsel} \underbrace{\tilde{\partial}_m^b\, d\tilde{x}_c^j\, d\tilde{x}_a^l}_{1x\ Basis\ 2x\ Kobasis}$ $\partial_a v^b = \tilde{\partial}_a v^b + \Gamma^b{}_{ca} v^c \Longrightarrow (\partial_a - \tilde{\partial}_a) v^b = \Gamma^b{}_{ca} v^c \Longrightarrow \boxed{\partial_a - \tilde{\partial}_a = \Gamma^b{}_{ca}}$ Das Kristoffelsymbol $\Gamma^b{}_{ca}$ ist kein Tensor, da es nicht wie ein Tensor transformiert.

Allgemeine kovariante Ableitungen ∇_a

Allgemeine kovariante Ableitungen	$\nabla_a: \mathcal{T}^p_q \to \mathcal{T}^p_{q+1}$. Eigenschaften: Linearität: (i)a) $\nabla_a\left(t^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q} + s^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q}\right) = \nabla_a t^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q} + \nabla_a s^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q}$ (i)b) $\nabla_a\left(\lambda t^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q}\right) = \lambda \nabla_a t^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q}$ Leibniz: (ii) $\nabla_a\left(t^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q} s^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q}\right) = \left(\nabla_a t^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q}\right) s^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q} + t^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q}\left(\nabla_a s^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q}\right)$ Kompatibilität mit ∂_a bei skalaren Funktionen: (iii) $\nabla_a f = \partial_a f = \tilde{\partial}_a f; f \in C^\infty(M)$ Satz von Schwarz: (iv) $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$ ∇_a ist vollständig bestimmt durch sein Wirkung auf Funktionen (koordinatenunabhängig) und Vektoren (koordinatenabhängig)
Diff.tensor $C^b{}_{ca}$	Differenzentensor $C^b{}_{ca}$: $(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)v^b = C^b{}_{ca} v^c$ Koordinatendarstellung: $C^b{}_{ca} = dx^i_c(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\partial^b_i$
$C^b{}_{ca}$ ist algebr. Derivation!	(i)b): $(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(f v^b) \overset{(ii)}{=} (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) f \cdot v^b + f \cdot (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) v^b \,\Big\vert\, (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) f \overset{(iii)}{=} 0 \Longrightarrow \boxed{(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(f v^b) = f(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) v^b}$ ✓
Basisunab-hängigkeit von $C^b{}_{ca}$	$\boxed{C^b{}_{ca} = \tilde{C}^b{}_{ca}}$ Bew.: $C^b{}_{ca} = dx^i_c(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\partial^b_i \dots (1)$; $\tilde{C}^b{}_{ca} = d\tilde{x}^i_c(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\tilde{\partial}^b_i = d\tilde{x}^i_c(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(\tilde{\partial}_i x^j \partial^b_j) \,\vert\, \tilde{\partial}_i x^j$ ist skalare Fkt. $\tilde{C}^b{}_{ca} = d\tilde{x}^i_c \tilde{\partial}_i x^j (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\partial^b_j = dx^j_c(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\partial^b_j \overset{(1)}{=} C^b{}_{ca}$ ■
Wirkung auf Kovektor	Sei $w_m: M \to T_pM^\sim$ ein Kovektor. Dann gilt: $\boxed{(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)w_m = -C^c{}_{ma} w_c \Leftrightarrow \tilde{\nabla}_a w_m = \nabla_a w_m - C^c{}_{ma} w_c}$ $w_c v^c \in C^\infty \Longrightarrow (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(w_c v^c) = 0 \overset{Leibniz}{\Longrightarrow} (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)w_c v^c + w_c(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)v^c = 0 \Longrightarrow (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)w_m v^m + w_c C^c{}_{ma} v^m = 0$ $\Longrightarrow [(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)w_m + w_c C^c{}_{ma}]v^m = 0 \Longrightarrow (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)w_m + w_c C^c{}_{ma} = 0 \Longrightarrow (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)w_m = -w_c C^c{}_{ma}$ ■
Symmetrie von $C^b{}_{ca}$	$\boxed{C^b{}_{ca} = C^b{}_{ac}}$ Bew.: $\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b f \overset{(iii)}{=} \tilde{\nabla}_a(\nabla_b f) \overset{s.o.}{=} \nabla_a \nabla_b f - C^m{}_{ba} \nabla_m f \dots (1)$ $\tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_a f \overset{analog}{=} \nabla_b \nabla_a f - C^m{}_{ab} \nabla_m f \overset{(iv)}{=} \nabla_a \nabla_b f - C^m{}_{ab} \nabla_m f \dots (2)$ $\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b f - \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_a f = 0 \overset{(1,2)}{=} -C^m{}_{ba} \nabla_m f + C^m{}_{ab} \nabla_m f \Longrightarrow -C^m{}_{ba} + C^m{}_{ab} = 0 \Longrightarrow C^m{}_{ab} = C^m{}_{ba}$ ■
Krümmungs-tensor a.k.a Riemanntensor	$[\nabla_a, \nabla_b]v^c = R^c{}_{dab} v^d$ mit $[\nabla_a, \nabla_b] \overset{\text{def}}{=} \nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a$ Koordinatendarstellung: $R^c{}_{dab} \overset{\text{def}}{=} dx^j_d [\nabla_a, \nabla_b]\partial^c_j$ Bew.: $[\nabla_a, \nabla_b]v^c = [\nabla_a, \nabla_b](v^j \partial^c_j) \overset{Leibniz}{=} ([\nabla_a, \nabla_b]v^j)\partial^c_j + v^j [\nabla_a, \nabla_b]\partial^c_j$ $[\nabla_a, \nabla_b]v^c = \left((\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)v^j\right)\partial^c_j + v^j [\nabla_a, \nabla_b]\partial^c_j = (\nabla_a \nabla_b v^j - \nabla_b \nabla_a v^j)\partial^c_j + v^j [\nabla_a, \nabla_b]\partial^c_j \overset{(iv)}{\Longrightarrow}$ $[\nabla_a, \nabla_b]v^c = (\nabla_a \nabla_b v^j - \nabla_a \nabla_b v^j)\partial^c_j + v^j [\nabla_a, \nabla_b]\partial^c_j = v^j [\nabla_a, \nabla_b]\partial^c_j \,\vert\, v^j = v^d\, dx^j_d \Longrightarrow$ $[\nabla_a, \nabla_b]v^c = v^d dx^j_d [\nabla_a, \nabla_b]\partial^c_j = R^c{}_{dab} v^d$ ■

Anhang: SRT, 4er Formalismus, Minkowski-Metrik

Beta und Gamma	$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$; $\beta = \frac{v}{c}$	In d Raumdimensionen bzw. D Raumzeitdimensionen gibt es d Boosts und $\frac{d(d+1)}{2} = \frac{D(D-1)}{2}$ Rotationen. Rotationen gehören zur Gruppe $\mathrm{SO}(d)$. Postulate: Konstanz von c, kein bevorzugtes IS.				
Lorentz-transfor-mation:	Sei S' das „bewegte" System, und S das „ruhende" System; d.h. die Geschwindigkeit und die Richtung von S' gegenüber S bestimmen die Größe und das Vorzeichen von β.	**Aktive LT:** Wie sieht „bewegtes" S' im „ruhenden" S aus? $\boldsymbol{a^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a'^\nu}$		**Passive LT:** Wie sieht „ruhendes" S im „bewegten" S' aus? $\boldsymbol{a'^\mu = \tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu a^\nu}$		
Aktive LT Boost in x, $S' \to S$:	$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Aktive LT Boost in y, $S' \to S$:	$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & \beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Aktive LT Boost in z, $S' \to S$:	$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$	Eigenschaften: $\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$ $\det(\Lambda) = +1$
Passive LT Boost in x, $S \to S'$:	$\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Passive LT Boost in y, $S \to S'$:	$\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Passive LT Boost in z, $S \to S'$:	$\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$	$\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ $\mathcal{L}_+^\uparrow \in \mathrm{SO}(3,1)^\uparrow$ Lorentzgruppe orthochron
Drehung:	**Aktive Drehung**: Objekt wird in festem Koordinatensystem gedreht.			**Passive Drehung**: Das Koordinatensystem wird gedreht.		
Aktive Drehung um x:	$D^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$	Aktive Drehung um y:	$D^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$	Aktive Drehung um z:	$D^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Passive Drehung um x:	$\tilde{D}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$	Passive Drehung um y:	$\tilde{D}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$	Passive Drehung um z:	$\tilde{D}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Rapidität:	$\xi = \mathrm{artanh}(\beta) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{E+c\lvert\vec{p}\rvert}{E-c\lvert\vec{p}\rvert}\right)$	$\beta = \tanh(\xi)$	$\gamma = \cosh(\xi)$	$\beta\gamma = \sinh(\xi)$	$\xi_{ges} = \xi_1 + \xi_2$	$v_{ges} = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$
Einfache LT's à la GDPH 1	Ort: $x = \gamma(x'+vt')$, $x' = \gamma(x-vt)$; $y = y'$, $y' = y$; $z = z'$, $z' = z$	Geschw.	$v_x = \frac{v'_x+v}{1+v'_x\frac{v}{c^2}}$; $v_y = \frac{v'_y}{\gamma\left(1+v'_x\frac{v}{c^2}\right)}$; $v_z = \frac{v'_z}{\gamma\left(1+v'_x\frac{v}{c^2}\right)}$; $v_x' = \frac{v_x-v}{1-v_x\frac{v}{c^2}}$; $v_y' = \frac{v_y}{\gamma\left(1-v_x\frac{v}{c^2}\right)}$; $v_z' = \frac{v_z}{\gamma\left(1-v_x\frac{v}{c^2}\right)}$			
Zeitpunkt:	$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$; $t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$	Dauer: $\tau = \gamma\tau_0$ Masse: $m = \gamma m_0$	Länge: $l = \frac{l_0}{\gamma}$	Frequenz $f_B = f_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$; $f_R = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$; $f_{traversal} = \frac{f_0}{\gamma}$		
Invariante:	$ds^2 = \eta_{ij}\,dx^i\,dx^j = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$; $ds^2 > 0$: zeitartig, Kausalität; $ds^2 < 0$: raumartig; $ds^2 = 0$: lichtartig.					
Energie:	$E = E_0 + E_{kin} = m_0c^2 + mc^2 - m_0c^2 = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$; $E_{kin} = E - E_0 = \sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4} - m_0c^2$					
	$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4 = E_0^2 \ldots invariant$					

4er Formalismus mit Minkowski-Metrik

4er-Vektor kont-ravari-ant	$a^\mu = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vec{a} \end{pmatrix}$	4er-Gra-dient	$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}$	Qua bla:	$\Box = \partial_\mu\partial^\mu = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta$	Minkowski-metrik (kart. Koord.):	$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; $\det(\eta_{\mu\nu}) = -1$	4er-Vektoren u. Tensoren und ihre Skalarprodukte sind Lorentz-invariant.
Index unten ⇔ „kovariant", Index oben ⇔ „kontravariant".				Indexwechsel ko/kontra in Metrik(+,-,-,-) ⇒ Vorzeichenwechsel bei a_1, a_2, a_3				
Rechen-regeln	$\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = g^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu$	$a_\mu = \eta_{\mu\nu}a^\nu$	$a^\mu = \eta^{\mu\nu}a_\nu$	$A^{\mu\nu} = A^\mu{}_\beta\eta^{\beta\nu} = \eta^{\mu\alpha}A_{\alpha\beta}\eta^{\beta\nu}$	$A_{\mu\nu} = A_\mu{}^\beta\eta_{\beta\nu} = \eta_{\mu\alpha}A^{\alpha\beta}\eta_{\beta\nu}$			
	$A^{\mu\nu}{}_{\downarrow}B^{\mu\uparrow}{}_\nu = A^\mu{}_\beta\eta^{\beta\nu}B^\mu{}_\nu = A^\mu{}_\beta B^{\mu\beta} = A^\mu{}_\nu B^{\mu\nu}$							
Skalarprodukt in $\mathbb{R}^{3,1}$:	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 = \boldsymbol{a}^T\eta\,\boldsymbol{b} = a^\mu\eta_{\mu\nu}b^\nu = a_\mu b^\mu$							
Jeder Tensor 2. Stufe kann in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil zerlegt werden: $A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$								
4er-Ortsvektor (kontravariant)	$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$	Eigenzeit τ in S'	$ds^2 = ds'^2 \Rightarrow c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2\,d\tau^2 \Rightarrow d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)dt^2 \Rightarrow \boxed{d\tau = \frac{1}{\gamma}dt}$					
4er-Geschw. (kontravariant)	$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{dx^\mu}{dt} = \gamma\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma\vec{v} \end{pmatrix}$;		$u^\mu u_\mu = \gamma^2(c^2 - \vec{v}^2) = c^2 > 0 \Rightarrow$zeitartig					
4er-Beschleu-nigung (kontravariant)	$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma\vec{v} \end{pmatrix} = \gamma\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma\vec{v} \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} c\frac{d\gamma}{dt} \\ \frac{d\gamma}{dt}\vec{v} + \gamma\vec{a} \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} c\,\gamma^3\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c^2} \\ \gamma^3\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c^2}\vec{v} + \gamma\vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^4\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c} \\ \gamma^4\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c^2}\vec{v} + \gamma^2\vec{a} \end{pmatrix}$		Beschleunigung nur in x-Richtung:	$a^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^4\frac{a_x v_x}{c} \\ \gamma^4 a_x \end{pmatrix}$				
	$\begin{pmatrix} 0 \\ a_x' \end{pmatrix} = \tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu a^\nu \Rightarrow a_x' = \gamma^3 a_x$ *	$a^\mu u_\mu = 0 \Rightarrow a^\mu \perp u^\mu$	$a^\mu a_\mu = -\tilde{\vec{a}}^2 < 0 \Rightarrow$raumartig. ($\tilde{\vec{a}}$...3er-Beschl. des IS, in dem $\vec{v}$=0)					
4er-Impuls (kontravariant)	$p^\mu = m_0u^\mu = m_0\begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0c + \frac{E_{kin}}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$	$p^\mu p_\mu = p_0^2 - \vec{p}^2 \equiv \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m_0^2c^2 \ldots invariant$	Masseteilchen: $E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}$ masselose Teil.: $E = \lvert\vec{p}\rvert c = hf; \vec{p} = \hbar\vec{k} = \frac{h}{\lambda}$					
4er-Kraft (kontravariant)	$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{dp^\mu}{dt} = \begin{pmatrix} F^0 \\ \gamma\vec{F} \end{pmatrix} = m_0a^\mu$	$\vec{F} = m_0\gamma\vec{a} + m_0\gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}\vec{v}$ (für $m_0 = const.$) $\Rightarrow \vec{F} \nparallel \vec{a}$ ($au\ss er\ \vec{v}\parallel\vec{a}\ \vee\ \vec{v}\perp\vec{a}$)						