

Quantenchromodynamik 1

14.08.2021

Kontext: Das Standardmodell der Teilchenphysik

		Generationen			weak elektr Farb- isospin Ladg. Ladg.	
		I	II	III		
Fermionen, Spin 1/2, intrinsische Parität +1	Quarks	up u 2.2 MeV	charm c 1.3 GeV	top t 173 GeV	+1/2	+1/2 +1/2 rgb starke WW
		down d 4.7 MeV	strange s 0.1 GeV	bottom b 4.2 GeV	-1/2	
	Leptonen	Elektron e ⁻ 0.5 MeV	Muon μ ⁻ 0.1 GeV	Tau τ ⁻ 1.8 GeV	-1/2	-1 EM Wechselwirkung
	Elektron Neutrino ν _e <1.1 eV	Muon Neutrino ν _μ <0.2 MeV	Tau Neutrino ν _τ <18 MeV	+1/2	-1/2 Schwache Wechselwirkung	

Eichbosonen, Spin 1, intrinsische Parität -1		Photon		Higgs	
		γ	0 GeV	H	125 GeV
schwache WW	starke	Gluon	0 GeV	Parität +1	
	W-Boson	W [±]	80 GeV	Q=±1	
	Z-Boson	Z	91 GeV		

Glukonen tragen Farbe und Antifarbe. Sie nehmen selber an der starken WW teil. Es gibt 8 Typen:
 $\frac{r\bar{b}+b\bar{r}}{\sqrt{2}}, \frac{r\bar{g}+g\bar{r}}{\sqrt{2}}, \frac{b\bar{g}+g\bar{b}}{\sqrt{2}}, \frac{r\bar{r}-b\bar{b}}{\sqrt{2}}, -i\frac{r\bar{b}-b\bar{r}}{\sqrt{2}}, -i\frac{r\bar{g}-g\bar{r}}{\sqrt{2}}, -i\frac{b\bar{g}-g\bar{b}}{\sqrt{2}}, \frac{r\bar{r}+b\bar{b}-2g\bar{g}}{\sqrt{2}}$

Lebensdauer: Muon 2 μs, Tauon 290 fs

Neutrinos ν_e, ν_μ, und ν_τ sind Mischungen aus 3 fundamentalen Neutrinozuständen mit definierten Massen ν₁, ν₂, und ν₃.

Flavor: u, d, c, s, t, b

Hadronen: gebundene Quarkzustände

Baryonen: Hadronen mit ungerader Quarkanzahl, z.B. p(uud), n(udd), Spin 1/2

Mesonen: Hadronen mit gerader Quarkanzahl (z.B. qq̄), ganzzahl. Spin

Allgemein: Symmetrien in der Quantenphysik

Allgemein:	<p>Physikalische Vorhersagen müssen unter einer Symmetrietransformation \hat{U} invariant sein: $\Psi \rightarrow \Psi' = \hat{U}\Psi \Rightarrow \langle \Psi \Psi \rangle = \langle \Psi' \Psi' \rangle = \langle \hat{U}\Psi \hat{U}\Psi \rangle = \langle \Psi \hat{U}^\dagger \hat{U} \Psi \rangle \Rightarrow \hat{U}^\dagger \hat{U} = \mathbb{1} \dots (1)$ Symmetrietransformation \hat{U} ist unitär</p> <p>Eigenzustände E des Hamiltonoperators \hat{H} bleiben gleich: $\hat{H}\Psi = \hat{H}\Psi' = \hat{H}\hat{U}\Psi = E\hat{U}\Psi = \hat{U}E\Psi = \hat{U}\hat{H}\Psi \Rightarrow [\hat{H}, \hat{U}] = 0 \dots (2)$</p>
Generator \hat{G}	<p>Infinitesimale Transformation: $\hat{U} = \mathbb{1} + i\varepsilon\hat{G} \dots (3)$ $\mathbb{1} = \hat{U}^\dagger \hat{U} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \mathbb{1} = (\mathbb{1} - i\varepsilon\hat{G}^\dagger)(\mathbb{1} + i\varepsilon\hat{G}) = \mathbb{1} + i\varepsilon\hat{G} - i\varepsilon\hat{G}^\dagger + \varepsilon^2\hat{G}^\dagger\hat{G} \Rightarrow$</p> <p>$\mathbb{1} = \mathbb{1} + i\varepsilon(\hat{G} - \hat{G}^\dagger) \Rightarrow [\hat{G} = \hat{G}^\dagger] \dots (4)$ Generator \hat{G} ist hermitesch</p> <p>$(2) \Rightarrow \hat{H}\hat{U} - \hat{U}\hat{H} = 0 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \hat{H}(\mathbb{1} + i\varepsilon\hat{G}) - (\mathbb{1} + i\varepsilon\hat{G})\hat{H} = 0 \Rightarrow \hat{H} - \hat{H} + i\varepsilon\hat{H}\hat{G} - i\varepsilon\hat{G}\hat{H} = 0 \Rightarrow [\hat{H}, \hat{G}] = 0 \dots (5)$</p>
Symmetrie Erhaltungssatz	<p>Schrödinger: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi \stackrel{\hbar=1}{\Rightarrow} i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\Psi = \frac{1}{i}\hat{H}\Psi \Rightarrow \dot{\Psi} = -i\hat{H}\Psi \dots (6a) \Rightarrow \dot{\Psi}^\dagger = i\Psi^\dagger\hat{H} \dots (6b)$</p> <p>$\langle A \rangle = \int \Psi^\dagger \hat{A} \Psi d^3x \stackrel{(6a)}{\Rightarrow} \frac{\partial}{\partial t} \langle A \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \int \Psi^\dagger \hat{A} \Psi d^3x \stackrel{(6a)}{\Rightarrow} \frac{\partial}{\partial t} \langle A \rangle = \int (\dot{\Psi}^\dagger \hat{A} \Psi + \Psi^\dagger \hat{A} \dot{\Psi}) d^3x \stackrel{(6ab)}{\Rightarrow}$</p> <p>$\frac{\partial}{\partial t} \langle A \rangle = \int (i\Psi^\dagger \hat{H} \hat{A} \Psi - i\Psi^\dagger \hat{A} \hat{H} \Psi) d^3x = i \int \Psi^\dagger (\hat{H} \hat{A} - \hat{A} \hat{H}) \Psi d^3x = i \langle \Psi [\hat{H}, \hat{A}] \Psi \rangle \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \langle A \rangle = i \langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle$ Ehrenfest</p> <p>Sei nun $\hat{A} = \hat{G}$, dann $\frac{\partial}{\partial t} \langle G \rangle = i \langle [\hat{H}, \hat{G}] \rangle \stackrel{(5)}{\Rightarrow} \frac{\partial}{\partial t} \langle G \rangle = 0$</p>
Beispiel: Translationsinvarianz	<p>1D: $x \rightarrow x + \varepsilon \Rightarrow \Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = \Psi(x + \varepsilon) \stackrel{Taylor}{=} \Psi(x) + \varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \dots = (1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}) \Psi(x) = \hat{U} \Psi(x) \stackrel{(3)}{=} (1 + i\varepsilon\hat{G}) \Psi(x)$</p> <p>$\Rightarrow i\varepsilon\hat{G} \hat{=} \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \hat{G} \hat{=} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} = \hat{p}_x \dots$ Translationsinvarianz \Leftrightarrow Impulserhaltung</p> <p>Infinitesimale Transformation: $\hat{U}_\varepsilon = \mathbb{1} + i\varepsilon\hat{p}_x$ Endliche Transformation: $\hat{U}(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + i\frac{x_0}{n}\hat{p}_x)^n = e^{ix_0\hat{p}_x} = e^{x_0\frac{\partial}{\partial x}}$</p> <p>$\Psi'(x) = \hat{U} \Psi(x) = e^{x_0\frac{\partial}{\partial x}} \Psi(x) \stackrel{Taylor}{=} (1 + x_0\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x_0^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{x_0^3}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \dots) \Psi(x) \stackrel{Taylor}{=} \Psi(x + x_0)$</p>

Historische Motivation: Hadronenspektrum im Quarkmodell (Isospin-Darstellung von Hadronen)

Motivation:	Unter den Hadronen findet man eine große Zahl von Teilchen mit gleichem Spin I und gleicher Parität Π und annähernd gleicher Masse, die sich nur in der Ladung unterscheiden (z.B. n(939,9 MeV), p(938,3 MeV), beide $I^\Pi = \frac{1}{2}^+$... Isospindublett).
Annahme:	Proton und Neutron sind zwei verschiedene Isospin-Zustände desselben Nukleons.
	$ p\rangle = \uparrow\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{\{T_3\}}; n\rangle = \downarrow\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{\{T_3\}}; \hat{T}_3 = \frac{1}{2}\sigma_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{\{T_3\}}$ $ p\rangle, n\rangle$ sind Eigenzustände von \hat{T}_3 $\hat{T}_3 p\rangle = \frac{1}{2} p\rangle; \hat{T}_3 n\rangle = -\frac{1}{2} n\rangle$
Pauli-matrizen:	$\sigma_1 = \uparrow\rangle\langle\downarrow + \downarrow\rangle\langle\uparrow = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\{T_3\}}; \sigma_2 = i(- \uparrow\rangle\langle\downarrow + \downarrow\rangle\langle\uparrow) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^{\{T_3\}}; \sigma_3 = \uparrow\rangle\langle\uparrow - \downarrow\rangle\langle\downarrow = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{\{T_3\}}$

SU(2) Isospin Flavor-Symmetrie der starken Wechselwirkung (Isospin-Darstellung von Quarks)

Idee:	$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{strong} + \hat{H}_{EM}$ Weil $\hat{H}_{EM} \ll \hat{H}_{strong}$, und $m_u \approx m_d$, gibt es eine (ud) Flavor-Symmetrie. Wir definieren: $ u\rangle$ und $ d\rangle$ sind zwei verschiedene Isospin-Zustände desselben Teilchens.	
Analogie zum "herkömmlichen" Spin	Spin-up-Teilchen: $ \uparrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \chi(s, m_s) = \chi(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$	\Leftrightarrow Up-Quark Isospin: $ u\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi(I, I_3) = \phi(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$
	Spin-down-Teilchen: $ \downarrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \chi(s, m_s) = \chi(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	\Leftrightarrow Down-Quark Isospin: $ d\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \phi(I, I_3) = \phi(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
	Spin-Operator \hat{S}^2 : $\hat{S}^2 \chi(s, m_s) = s(s+1) \chi(s, m_s)$	\Leftrightarrow Kasimir-Operator \hat{T}^2 : $\hat{T}^2 \phi(I, I_3) = I(I+1) \phi(I, I_3)$
	Spin-Operator \hat{S}_z : $\hat{S}_z \chi(s, m_s) = m_s \chi(s, m_s)$	\Leftrightarrow Isospin-Operator \hat{T}_3 : $\hat{T}_3 \phi(I, I_3) = I_3 \phi(I, I_3)$
Spin	Spin-Operator \hat{S} : $\hat{S} = \begin{pmatrix} \hat{S}_x \\ \hat{S}_y \\ \hat{S}_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_3 \end{pmatrix}$ $\hat{S}_i = \hat{S}_i^\dagger$ (herm.) $\text{Tr}(\hat{S}_i) = 0$ $[\hat{S}_i, \hat{H}] = 0$	\Leftrightarrow Isospin-Operator \hat{T} : $\hat{T} = \begin{pmatrix} \hat{T}_1 \\ \hat{T}_2 \\ \hat{T}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_3 \end{pmatrix}$ $\hat{T}_i = \hat{T}_i^\dagger$ (herm.) $\text{Tr}(\hat{T}_i) = 0$ $[\hat{T}_i, \hat{H}] = 0$
	$ \uparrow\rangle, \downarrow\rangle$ Eigenz. v. \hat{S}_z : $\hat{S}_z \uparrow\rangle = \frac{1}{2} \uparrow\rangle$; $\hat{S}_z \downarrow\rangle = -\frac{1}{2} \downarrow\rangle$	$\Leftrightarrow u\rangle, d\rangle$ Eigenz. v. \hat{T}_3 : $\hat{T}_3 u\rangle = \frac{1}{2} u\rangle$; $\hat{T}_3 d\rangle = -\frac{1}{2} d\rangle$
Symmetrie trafo SU(2)	$ u\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{\{T_3\}}$; $ d\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{\{T_3\}} \Rightarrow \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = \hat{U}(\vec{\alpha}) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ mit $\hat{U}(\vec{\alpha}) = e^{i\vec{\alpha}\vec{T}} \in \text{SU}(2) \Rightarrow \hat{U}\hat{U}^\dagger = 1, \det(U) = 1$	
Generatoren	$\hat{U}(\vec{\alpha}) = e^{i\alpha_i \hat{G}_i}$ mit $\hat{G}_i \in \{\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3\}$ Algebra: $[\hat{T}_1, \hat{T}_2] = i\hat{T}_3, [\hat{T}_2, \hat{T}_3] = i\hat{T}_1, [\hat{T}_3, \hat{T}_1] = i\hat{T}_2 \Rightarrow [\hat{T}_k, \hat{T}_l] = i\epsilon_{klm} \hat{T}_m$	
Darst. v. \hat{T}^2	$\hat{T}_+ \hat{T}_- = (\hat{T}_1 + i\hat{T}_2)(\hat{T}_1 - i\hat{T}_2) = \hat{T}_1^2 + \hat{T}_2^2 \dots (1) \hat{T}_- \hat{T}_+ = (\hat{T}_1 - i\hat{T}_2)(\hat{T}_1 + i\hat{T}_2) = \hat{T}_1^2 + \hat{T}_2^2 \dots (2)$ $\hat{T}^2 = \hat{T} \cdot \hat{T} = \hat{T}_1^2 + \hat{T}_2^2 + \hat{T}_3^2 = \frac{1}{2}(\hat{T}_1^2 + \hat{T}_2^2 + \hat{T}_1^2 + \hat{T}_2^2) + \hat{T}_3^2 \xrightarrow{(1)(2)} \hat{T}^2 = \frac{1}{2}(\hat{T}_+ \hat{T}_- + \hat{T}_- \hat{T}_+) + \hat{T}_3^2 = \hat{T}_- \hat{T}_+ + \hat{T}_3(\hat{T}_3 + 1)$	
Komponenten von \hat{T}	$\hat{T}_1 = \frac{1}{2}(\hat{T}_+ + \hat{T}_-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_1$; $\hat{T}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{T}_+ - \hat{T}_-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_2$; $\hat{T}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_3$	
Leiter-Operatoren	$\hat{T}_+ = \hat{T}_1 + i\hat{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\hat{T}_- = \hat{T}_1 - i\hat{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; nicht hermitesch: $\hat{T}_+^\dagger = \hat{T}_-$; $\hat{T}_-^\dagger = \hat{T}_+$ $\hat{T}_+ d\rangle = u\rangle, \hat{T}_+ u\rangle = 0\rangle$; $\hat{T}_- d\rangle = 0\rangle, \hat{T}_- u\rangle = 0\rangle$ wenn $I_3 < I$: $\hat{T}_+ \phi(I, I_3) = \phi(I, I_3 + 1)$; wenn $I_3 = I$: $\hat{T}_+ \phi(I, I_3) = 0$ wenn $I_3 > -I$: $\hat{T}_- \phi(I, I_3) = \phi(I, I_3 - 1)$; wenn $I_3 = -I$: $\hat{T}_- \phi(I, I_3) = 0$	
Kommutator	$[\hat{T}_3, \hat{T}_+] = \hat{T}_+$; $[\hat{T}_3, \hat{T}_-] = -\hat{T}_-$; $[\hat{T}_+, \hat{T}_-] = 2\hat{T}_3$; $[\hat{T}^2, \hat{T}_+] = [\hat{T}^2, \hat{T}_-] = 0$	
Bew. Wirkung \hat{T}_+, \hat{T}_-	$[\hat{T}_3, \hat{T}_+] = \hat{T}_+ \Rightarrow \hat{T}_3 \hat{T}_+ - \hat{T}_+ \hat{T}_3 = \hat{T}_+ \Rightarrow \hat{T}_3 \hat{T}_+ = \hat{T}_+ \hat{T}_3 + \hat{T}_+ \Rightarrow \hat{T}_3 \hat{T}_+ = \hat{T}_+ (\hat{T}_3 + 1)$ $[\hat{T}_3, \hat{T}_-] = -\hat{T}_- \Rightarrow \hat{T}_3 \hat{T}_- - \hat{T}_- \hat{T}_3 = -\hat{T}_- \Rightarrow \hat{T}_3 \hat{T}_- = \hat{T}_- \hat{T}_3 - \hat{T}_- \Rightarrow \hat{T}_3 \hat{T}_- = \hat{T}_- (\hat{T}_3 - 1)$	
Beweis $I_3 \in \{-I, \dots, I\}$	$[\hat{T}_+, \hat{T}_-] = 2\hat{T}_3 \Rightarrow \hat{T}_+ \hat{T}_- - \hat{T}_- \hat{T}_+ = 2\hat{T}_3 \Rightarrow \hat{T}_+ \hat{T}_- = 2\hat{T}_3 + \hat{T}_- \hat{T}_+ \dots (1)$ Bestimme maximales I_3 : $\hat{T}^2 \phi(I, I_3^{max}) = \left(\frac{\hat{T}_+ \hat{T}_- + \hat{T}_- \hat{T}_+}{2} + \hat{T}_3^2 \right) \phi(I, I_3^{max}) \stackrel{(1)}{=} \left(\frac{2\hat{T}_3 + \hat{T}_- \hat{T}_+ + \hat{T}_- \hat{T}_+}{2} + \hat{T}_3^2 \right) \phi(I, I_3^{max}) = (\hat{T}_- \hat{T}_+ + \hat{T}_3 + \hat{T}_3^2) \phi(I, I_3^{max}) \dots (2)$ $\hat{T}^2 \phi(I, I_3^{max}) = (\hat{T}_- \hat{T}_+ + \hat{T}_3(\hat{T}_3 + 1)) \phi(I, I_3^{max}) \Big \hat{T}_+ \phi(I, I_3^{max}) = 0 \Rightarrow \hat{T}^2 \phi(I, I_3^{max}) = \hat{T}_3(\hat{T}_3 + 1) \phi(I, I_3^{max})$ $\hat{T}^2 \phi(I, I_3^{max}) = I_3(I_3 + 1) \phi(I, I_3^{max}) \stackrel{def}{=} I(I+1) \phi(I, I_3^{max}) \Rightarrow I_3(I_3 + 1) = I(I+1) \Rightarrow \boxed{I_3^{max} = I}$ $(2) \Rightarrow \hat{T}^2 = \hat{T}_- \hat{T}_+ + \hat{T}_3 + \hat{T}_3^2 \Rightarrow \hat{T}^2 - \hat{T}_- \hat{T}_+ = \hat{T}_3 + \hat{T}_3^2 \Rightarrow \hat{T}_- \hat{T}_+ = \hat{T}^2 - \hat{T}_3(\hat{T}_3 + 1) \dots (3)$ Minimales T_3 : $\langle I_3^{min} \hat{T}_+ \hat{T}_- I_3^{min} \rangle \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \langle I_3^{min} 2\hat{T}_3 + \hat{T}_- \hat{T}_+ I_3^{min} \rangle \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \langle I_3^{min} 2\hat{T}_3 + \hat{T}^2 - \hat{T}_3 - \hat{T}_3^2 I_3^{min} \rangle \stackrel{!}{=} 0$ $\langle I_3^{min} \hat{T}_3 + \hat{T}^2 - \hat{T}_3^2 I_3^{min} \rangle \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \langle I_3^{min} \hat{T}^2 I_3^{min} \rangle - \langle I_3^{min} \hat{T}_3(\hat{T}_3 - 1) I_3^{min} \rangle \stackrel{!}{=} 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$ $I(I+1) - I_3^{min}(I_3^{min} - 1) = 0 \Rightarrow I(I+1) = I_3^{min}(I_3^{min} - 1) \Rightarrow I^2 + I = (I_3^{min})^2 - I_3^{min} \Rightarrow \boxed{I_3^{min} = -I}$	

Symmetriegruppen U(2) und SU(2)

U(2) ist die Gruppe der L.U., unitären 2x2-Matrizen $\hat{A}\hat{A}^\dagger=1$	Generatoren, die den Raum für U(2) aufspannen: $\{\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3, \hat{1}_2\}$
SU(2) sind alle Matrizen $U \in U(2)$ für die gilt: $\det(U) = 1$	Generatoren, die den Raum für SU(2) aufspannen: $\{\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3\}$ bzw. $\{\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3\}$
Drehung im Isospinraum: $\hat{U}(\vec{\alpha}) = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}} = e^{i(\alpha_1\hat{T}_1 + \alpha_2\hat{T}_2 + \alpha_3\hat{T}_3)}$ $\hat{U}(\vec{\alpha}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\hat{U}\left(\frac{\vec{\alpha}}{n}\right) \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\hat{1}_2 + i\frac{\vec{\alpha}}{n} \cdot \vec{T} \right)^n = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}}$ Jedes $\hat{U} \in SU(2)$ kann in der Form $\hat{U} = \hat{U}(\vec{\alpha}) = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}}$ dargestellt werden ($\vec{\alpha} = \alpha\vec{e}_n; 0 \leq \alpha < \pi$).	Beweis: Infinitesimale Drehung $\hat{U}(\delta\vec{\alpha}) = \hat{1}_2 + i\delta\vec{\alpha} \cdot \vec{T}$ mit $\delta\vec{\alpha} = \delta\alpha\vec{e}_n \Rightarrow$
Beweis $\hat{U} = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}} \Rightarrow \hat{U} \in SU(2)$	(1) Unitarität: $\hat{U}\hat{U}^\dagger = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}} e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}} \vec{T}^\dagger = \vec{T} \Rightarrow \hat{U}\hat{U}^\dagger = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}} e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}} = e^0 = 1 \checkmark$ (2) $\det(\hat{U}) \stackrel{?}{=} 1$: Sei \hat{U}' die Diagonalf orm von \hat{U} : $\hat{U}' = A\hat{U}A^{-1}$. Es muss auch $\hat{U}' \in SU(2)$ sein $\Rightarrow \hat{U}' = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}} \stackrel{\hat{H}' \stackrel{!}{=} \vec{\alpha}\cdot\vec{T}}{\Rightarrow} \hat{U}' = e^{iH'}$. Damit \hat{U}' diagonal sein kann, muss auch $i\hat{H}'$ die Diagonalf orm von $i\hat{H}$ sein: $\hat{U}' = \begin{pmatrix} U'_{11} & 0 \\ 0 & U'_{22} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} e^{i\hat{H}'} = \begin{pmatrix} e^{iH'_{11}} & 0 \\ 0 & e^{iH'_{22}} \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\det(\hat{U}) = \det(\hat{U}') = \det(e^{iH'}) = \det \begin{pmatrix} e^{iH'_{11}} & 0 \\ 0 & e^{iH'_{22}} \end{pmatrix} = e^{iH'_{11}} e^{iH'_{22}} = e^{i(H'_{11} + H'_{22})} = e^{i\text{Tr}(H')} = e^{i\text{Tr}(H)} = e^{i\text{Tr}(\vec{\alpha}\cdot\vec{T})} = e^{i0} = 1$
Beweis $\hat{U} \in SU(2) \Rightarrow \hat{U} = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}}$	$\hat{U} \in SU(2) \Rightarrow \hat{U}\hat{U}^\dagger = 1 \hat{U} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_3 & z_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_3 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^* & -z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 z_1^* + z_2 z_2^* & -z_1 z_3^* + z_2 z_4^* \\ -z_3 z_1^* + z_4 z_2^* & z_3 z_3^* + z_4 z_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ l.o.: $z_1 z_1^* + z_2 z_2^* = 1 \dots (1)$; r.u.: $z_3 z_3^* + z_4 z_4^* = 1 \dots (2)$; l.u.: $z_1 z_3^* - z_2 z_4^* = 0 \dots (3)$ $\hat{U} \in SU(2) \Rightarrow \det(\hat{U}) = 1 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_3 & z_4 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow z_1 z_4 + z_2 z_3 = 1 \dots (4)$ (3) $\Rightarrow z_2^* z_4 = z_1^* z_3$; $z_2^* \Rightarrow z_4 = \frac{z_1^* z_3}{z_2^*} \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \frac{z_1 z_1^* z_3}{z_2^*} + z_2 z_3 = 1 \cdot z_2^* \Rightarrow z_1 z_1^* z_3 + z_2 z_2^* z_3 = z_2^* z_3 \Rightarrow z_1 z_1^* + z_2 z_2^* = \frac{z_2^*}{z_3} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{z_2^*}{z_3} = 1 \Rightarrow z_3 = z_2^* \dots (5) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} z_1^* z_3 - z_3 z_4 = 0 z_3 \Rightarrow z_1^* - z_4 = 0 \Rightarrow z_4 = z_1^* \dots (6)$ $\hat{U} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_3 & z_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} z_1 \stackrel{\text{def}}{=} a + ib \\ z_2 \stackrel{\text{def}}{=} c + id \end{matrix} \Rightarrow \hat{U} = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -z_3 & z_4 \end{pmatrix} \stackrel{(5),(6)}{\Rightarrow} \hat{U} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix} \dots (7)$ (1) $\Rightarrow z_1 z_1^* + z_2 z_2^* = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \dots (8)$ $\hat{U} = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}} = e^{i\alpha\vec{e}_n \cdot \vec{T}} = e^{i\frac{\alpha}{2}\vec{e}_n \cdot \vec{\sigma}} = \mathbb{1} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i(\vec{e}_n \cdot \vec{\sigma}) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \mathbb{1} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ $\hat{U} = \mathbb{1} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i(n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \left(n_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + n_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ $\hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \left(\begin{pmatrix} 0 & n_1 \\ n_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -in_2 \\ in_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_3 & 0 \\ 0 & -n_3 \end{pmatrix} \right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ $\hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \begin{pmatrix} n_3 & n_1 - in_2 \\ n_1 + in_2 & -n_3 \end{pmatrix} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \begin{pmatrix} in_3 & n_2 + in_1 \\ -n_2 + in_1 & -in_3 \end{pmatrix} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ $\hat{U} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + in_3 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & n_2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + in_1 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -n_2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + in_1 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - in_3 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} \stackrel{(7)}{=} \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) & c = n_2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ d = n_1 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & b = n_3 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{matrix} \stackrel{(8)}{\Rightarrow}$ $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + n_3^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + n_2^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + n_1^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 \Rightarrow n_3^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + n_2^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + n_1^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow$ $n_3^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + n_2^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + n_1^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) : \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow n_3^2 + n_2^2 + n_1^2 = 1 \Rightarrow \vec{e}_n ^2 = 1 \checkmark$ D.h.: Aus $\hat{U} \in SU(2)$ folgt (8). Rechnet man $\hat{U} = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}}$ aus und verwendet (8), sieht man, dass unter der Bedingung $\vec{\alpha} = \alpha\vec{e}_n; 0 \leq \alpha < \pi$ der Operator \hat{U} mit $e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}}$ eindeutig dargestellt werden kann.
Eichtrafo	Jede beliebige unitäre Matrix $\hat{A} \in U(2)$ kann dargestellt werden als $\hat{A} = \hat{U}e^{i\varphi/2}$ mit $\hat{U} \in SU(2)$ (globale Eichtransformation) Bew.: (a) ... $\det(\hat{A}) = \det(\hat{A}^\dagger)^* = \det(\hat{A}^{-1})^* = \det\left(\frac{1}{\hat{A}}\right)^* \Rightarrow \det(\hat{A}) = e^{i\varphi}; \det\left(\frac{1}{\hat{A}}\right)^* = \left(\frac{1}{e^{i\varphi}}\right)^* = (e^{-i\varphi})^* = e^{i\varphi} = \det(\hat{A}) \checkmark$ (b) ... $\hat{U} \in SU(2)$ ist „normiert“: $\det(U) = 1$, aber $\hat{A} \in U(2)$ nicht. Daher: $\hat{U} = \frac{\hat{A}}{\lambda} \Rightarrow \lambda\hat{U} = \hat{A}$ $\det(\lambda\hat{U}) = \det(\hat{A}) \det(\hat{A}) = e^{i\varphi} \Rightarrow \det(\lambda\hat{U}) = e^{i\varphi} \Rightarrow \lambda^2 \det(\hat{U}) = e^{i\varphi} \det(\hat{U}) = 1 \Rightarrow \lambda^2 = e^{i\varphi} \Rightarrow \lambda = e^{i\varphi/2} \Rightarrow \hat{A} = \hat{U}e^{i\varphi/2}$

Darstellung einer (fiktiven) Kombination von zwei Up- oder Down-Quarks, oder einer (realen) Kombination von zwei Spin-½ Teilchen, oder eines Zweinukleonensystems mit SU(2)-Multipletts

Anmerkung	<i>Gebundene Zwei-Quark-Zustände, in denen ein Up- und ein Down-Quark kombiniert werden, sind rein hypothetisch, weil die Gesamtfarbe niemals weiß ergeben kann. Das Konzept ist aber die Grundlage dafür, drei (du)-Quarks in einen Baryonen-Zustand zu vereinigen. Sehr wohl realistisch ist die Beschreibung einer Kombination von 2 Nukleonen oder 2 Spin-½-Teilchen.</i>		
Multipletts	Multipletts sind gruppentheoretisch irreduzible Darstellungen (Die Darstellung einer Gruppe sind quadratische Matrizen, die denselben Multiplikationsregeln gehorchen wie die Gruppenelemente). Irreduzibel heißen Darstellungen, die nicht in direkte Summen zerlegt werden können. Unter der Annahme, dass \hat{H}_S nicht zwischen $ p\rangle = \uparrow\rangle$ und $ n\rangle = \downarrow\rangle$ unterscheidet, sind die Eigenwerte von \hat{H}_S und \hat{T}_3 gleichzeitig bestimmbar. Zustände gleicher Energie können daher längs der \hat{T}_3 -Achse angeordnet werden. Alle Zustände eines Multipletts gehören zum selben Isospin I .		
Kombination von Isospins	$I_3 = I_3^{(1)} + I_3^{(2)}$ $ I^{(1)} - I^{(2)} \leq I \leq I^{(1)} + I^{(2)} $	Kombination von Spins $m_s = m_s^{(1)} + m_s^{(2)}$ $ s^{(1)} - s^{(2)} \leq s \leq s^{(1)} + s^{(2)} $	Analogie: $M_j = m_s + m_l$ $ s - l \leq J \leq s + l $
Konfigurationsraum	Beide Teilchen können jeweils zwei Zustände annehmen ($ u\rangle, d\rangle$) Daher ist der totale Konfigurationsraum $2 \otimes 2$. Kann reduziert werden zu $3_S \oplus 1_A$.		
symmetrisches Isospin Triplet 3_S	<ul style="list-style-type: none"> • Maximalzustand: $\phi_S(1, +1) = \phi^{(1)}\left(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) \phi^{(2)}\left(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) = uu\rangle \dots$ das S in ϕ_S steht für "symmetrisch" • $\phi_S(1, 0) = \hat{T}_- \phi_S(1, +1) = \hat{T}_- uu\rangle = \hat{T}_-^{(1)} uu\rangle + \hat{T}_-^{(2)} uu\rangle = du\rangle + ud\rangle \stackrel{norm.}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(du\rangle + ud\rangle)$. • $\phi_S(1, -1) = \hat{T}_- (du\rangle + ud\rangle) = \hat{T}_-^{(1)}(du\rangle + ud\rangle) + \hat{T}_-^{(2)}(du\rangle + ud\rangle) = 0 + dd\rangle + dd\rangle + 0 \stackrel{norm.}{=} dd\rangle$ 		
Isospin Singulett 1_A	Es gibt immer nur einen Zustand mit $I_3 = I_3^{max}$, und nur einen mit $I_3 = I_3^{min} = -I_3^{max}$. Daher kann der vierte Zustand nur orthogonal zum „mittleren“ Zustand $\phi_S(1, 0)$ sein: $\phi_A(0, 0) = \perp \phi_S(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(du\rangle - ud\rangle) \dots$ A in ϕ_A steht für antisymm.		
Spin- oder Zwei-Nukleonen Singlet und Triplet	Weil die SU(2)-Algebra zur Kombination von Spin-½ Teilchen dieselbe ist wie für den Isospin, werden die möglichen Spin-Wellenfunktionen von zwei Spin ½-Teilchen auf die gleiche Art erzeugt, ebenso wie die Wellenfunktion eines Zweinukleonensystems. Daher ergibt die Kombination von zwei Spin ½ Teilchen oder von zwei Nukleonen analog: Spin- oder Zwei-Nukleon Triplet: $\chi_S(1, +1) = \uparrow\uparrow\rangle, \chi_S(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\rangle + \downarrow\uparrow\rangle), \chi_S(1, -1) = \downarrow\downarrow\rangle$; Spin- oder Zwei-Nukleon Singlet: $\chi_A(0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\rangle)$		

Darstellung einer Kombination von drei Up- oder Down-Quarks, oder einer Kombination von drei Spin-1/2-Teilchen, oder eines Dreinukleonensystems mit SU(2)-Multiplikation

Konfigurationsraum	<p>Alle drei Teilchen können jeweils zwei verschiedene Zustände annehmen ($u\rangle, d\rangle$). Daher ist der Gesamtkonfigurationsraum $2 \otimes 2 \otimes 2$. Das kann zu $4_S \oplus 2_{MS} \oplus 2_{MA}$ reduziert werden: Ein symmetrisches Quadruplett, ein gemischt-symmetrisches Dublett, ein gemischt antisymmetrisches Dublett.</p> <p>ddd $\frac{1}{\sqrt{3}}(udd + dud + ddu)$ $\frac{1}{\sqrt{3}}(udu + duu + udu)$ uuu</p> <p>$I = \frac{3}{2}$: $\bullet \xrightarrow{-\frac{3}{2}} \bullet \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \bullet \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \bullet \xrightarrow{+\frac{3}{2}} \bullet \rightarrow I_3$ \oplus $I = \frac{1}{2}$: $\bullet \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \bullet \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \bullet \rightarrow I_3$ \oplus $\bullet \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \bullet \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \bullet \rightarrow I_3$</p>
symmetrisches Isospin Quadruplett	<ul style="list-style-type: none"> Maximalzustand $\phi_S\left(\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right) = uuu\rangle$ $\phi_S\left(\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\right) = \hat{T}_- \phi_S\left(\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right) = \hat{T}_- uuu\rangle \stackrel{norm.}{=} \frac{1}{\sqrt{3}}(duu\rangle + udu\rangle + uud\rangle)$ $\phi_S\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \hat{T}_- \phi_S\left(\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\right) = \hat{T}_- (duu\rangle + udu\rangle + uud\rangle) \stackrel{norm.}{=} \frac{1}{\sqrt{3}}(ddu\rangle + dud\rangle + ddu\rangle)$ $\phi_S\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \hat{T}_- \phi_S\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \hat{T}_- (ddu\rangle + dud\rangle + ddu\rangle) \stackrel{norm.}{=} ddd\rangle$
Gemischt symmetrisches Dublett	<p>Es kann nur einen Zustand mit $I_3 = I_3^{max} = \frac{3}{2}$ geben, und nur einen mit $I_3 = I_3^{min} = -\frac{3}{2}$. Daher suchen wir zwei weitere (gemischt symmetrische) Zustände mit $I = \frac{1}{2}$.</p> <ul style="list-style-type: none"> Wir koppeln den symmetrischen Zwei-Quark-Zustand $\phi_S(1, +1) = uu\rangle$ mit einem dritten d-Quark um $I_3 = \frac{1}{2}$ zu erreichen Aber wir erreichen $I_3 = \frac{1}{2}$ auch wenn wir $\phi_S(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(du\rangle + ud\rangle)$ mit einem dritten up-Quark koppeln. Eine Lösung ist eine Superposition dieser Zustände: $\phi_{MS}\left(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) = \alpha uu\rangle d\rangle + \beta(du\rangle + ud\rangle) u\rangle = \alpha uud\rangle + \beta(duu\rangle + udu\rangle)$. Bedingungen zur Bestimmung von α und β: $\left\langle \phi_S\left(\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\right) \middle \phi_{MS}\left(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) \right\rangle = 0$ (Orthogonalität) und Normierung $\alpha^2 + \beta^2 = 1 \Rightarrow \phi_{MS}\left(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 uud\rangle - udu\rangle - duu\rangle)$ Wir erreichen den zweiten gemischt-symmetrischen Zustand von hier mit dem \hat{T}_--Operator: $\phi_{MS}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \hat{T}_- \phi_{MS}\left(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) = \hat{T}_- (2 uud\rangle - udu\rangle - duu\rangle) \stackrel{norm.}{=} \frac{1}{\sqrt{6}}(2 ddu\rangle - dud\rangle - udd\rangle)$
Gemischt antisymmetrisches Dublett	<p>Es gibt zwei weitere (gemischt antisymmetrische) Zustände mit $I = \frac{1}{2}$.</p> <ul style="list-style-type: none"> Wir koppeln den antisymmetrischen Zwei-Quark-Zustand $\phi_A(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(du\rangle - ud\rangle) u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(udu\rangle - duu\rangle)$ mit einem dritten Up-Quark, um $I_3 = \frac{1}{2}$ zu erreichen. Wir erreichen den anderen gemischt-antisymmetrischen Zustand mit dem \hat{T}_--Operator $\phi_{MA}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \hat{T}_- \phi_{MA}\left(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) = \hat{T}_- (udu\rangle - duu\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(udd\rangle - dud\rangle)$.
Spin	<p>Weil die SU(2)-Algebra zur Kombination von Spin-1/2 Teilchen dieselbe ist wie für den Isospin, werden die möglichen Spin-Wellenfunktionen von drei gekoppelten Spin 1/2-Teilchen auf die gleiche Art erzeugt, ebenso wie die Wellenfunktion eines Dreinukleonensystems. Daher ergibt die Kombination von drei Spin-1/2-Teilchen oder von drei Nukleonen analog:</p> <ul style="list-style-type: none"> ein symmetrisches Quadruplett: $\chi_S\left(\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right) = \uparrow\uparrow\uparrow\rangle, \chi_S\left(\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \uparrow\downarrow\uparrow\rangle + \downarrow\uparrow\uparrow\rangle), \chi_S\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + \downarrow\uparrow\downarrow\rangle + \downarrow\downarrow\uparrow\rangle), \chi_S\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \downarrow\downarrow\downarrow\rangle$ ein gemischt-symmetrisches Dublett: $\chi_{MS}\left(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 \uparrow\uparrow\downarrow\rangle - \uparrow\downarrow\uparrow\rangle - \downarrow\uparrow\uparrow\rangle), \chi_{MS}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 \downarrow\downarrow\uparrow\rangle - \downarrow\uparrow\downarrow\rangle - \uparrow\downarrow\downarrow\rangle)$ ein gemischt-antisymmetrisches Dublett: $\chi_{MA}\left(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - \downarrow\uparrow\uparrow\rangle), \chi_{MA}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\downarrow\rangle)$

Grundzustand der Baryonen-Wellenfunktion

Symmetrien	$\Psi = \phi_{flavor} \chi_{spin} \xi_{color} \eta_{space}$ Quarks sind Fermionen $\Rightarrow \Psi \stackrel{!}{=} \Psi_A$. Immer: $\xi_{color} = \xi_A$; mit $L = 0$: $\eta_{space} = \eta_S \Rightarrow \Psi_A = \phi_{flavor} \chi_{spin} \xi_A \eta_S \Rightarrow \phi_{flavor} \chi_{spin}$ muss symmetrisch sein (bei $L = 0$)		
Δ -Baryonen	$\Psi_A = \phi_S \chi_S \xi_A \eta_S$ $I = \frac{3}{2}, S = \frac{3}{2}$		$\Psi_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{MS} \chi_{MS} + \phi_{MA} \chi_{MA}) \xi_A \eta_S$ <i>symmetric</i> $I = \frac{1}{2}, S = \frac{1}{2}$
Beispiel: Spin-Up-Proton	$ p\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{MS}\left(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) \chi_{MS}\left(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) + \phi_{MA}\left(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) \chi_{MA}\left(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)) \Rightarrow$ $ p\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(2 uud\rangle - udu\rangle - duu\rangle) \frac{1}{\sqrt{6}}(2 \uparrow\uparrow\downarrow\rangle - \uparrow\downarrow\uparrow\rangle - \downarrow\uparrow\uparrow\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(udu\rangle - duu\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - \downarrow\uparrow\uparrow\rangle)\right) \Rightarrow$ $ p\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}}(2u\uparrow u\downarrow d\uparrow - u\uparrow u\downarrow d\downarrow - u\downarrow u\uparrow d\uparrow + 2u\downarrow d\uparrow u\uparrow - u\downarrow d\uparrow u\downarrow - u\downarrow d\downarrow u\uparrow + 2d\downarrow u\uparrow u\uparrow - d\uparrow u\uparrow u - d\uparrow u\downarrow u\uparrow)$		

Isospin-Darstellung von Anti-Quarks

Definition:	$ \bar{u}\rangle \cong \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \bar{d}\rangle \cong \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{q}\rangle \cong \begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$	Symmetrie Trafo	$ \bar{q}'\rangle = \hat{U}(\vec{\alpha}) \bar{q}\rangle$ mit $\hat{U}(\vec{\alpha}) = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}}$	
Leiter-Oper.	$\hat{T}_+ \bar{u}\rangle = - \bar{d}\rangle; \hat{T}_+ \bar{d}\rangle = 0\rangle$ mit $\hat{T}_+ = \hat{T}_1 + i\hat{T}_2; \hat{T}_- \bar{u}\rangle = 0\rangle; \hat{T}_- \bar{d}\rangle = \bar{u}\rangle$ mit $\hat{T}_- = \hat{T}_1 - i\hat{T}_2$			

Die Algebra der SU(3)

Definition	Die Gruppe SU(3) wird durch die Menge der unitären 3x3-Matrizen mit Determinante 1 gebildet. $\hat{U}\hat{U}^\dagger=1, \det(\hat{U})=1$	
Generatoren (Gell-Mann-Matrizen)	Die SU(3) benötigt $3^2 - 1 = 8$ Generatoren (Anmerkung: Eine komplexe 3x3-Matrix hätte 18 Parameter. Die Bedingung $[\hat{U}\hat{U}^\dagger=1]$ reduziert auf 9 Parameter; $[\det(\hat{U})=1]$ reduziert auf 8 Parameter). Geeignete Generatoren sind z.B. die 3x3-Matrizen $\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3, \hat{\lambda}_4, \hat{\lambda}_5, \hat{\lambda}_6, \hat{\lambda}_7, \hat{\lambda}_8\}$ beziehungsweise die 3x3-Matrizen $\{\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3, \hat{t}_4, \hat{t}_5, \hat{t}_6, \hat{t}_7, \hat{t}_8\}$ mit $[\hat{t}_i = \frac{\hat{\lambda}_i}{2}]$ und $[\text{Tr}(\hat{\lambda}_i) = \text{Tr}(\hat{t}_i) = 0]$. Außerdem: $[\text{Tr}(\hat{\lambda}_i \hat{\lambda}_j) = 2\delta_{ij}; \text{Tr}(\hat{t}_i \hat{t}_j) = \delta_{ij}]$	
Generatoren (Gell-Mann-Matrizen)	$\hat{\lambda}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{=} \hat{\sigma}_1; \hat{\lambda}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{=} \hat{\sigma}_2; \hat{\lambda}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{=} \hat{\sigma}_3 \Rightarrow \text{Gewichtsoperator } [\hat{T}_3 = \hat{t}_3 = \frac{\hat{\lambda}_3}{2}]$ $\hat{\lambda}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \hat{\lambda}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\hat{\lambda}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \hat{\lambda}_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \hat{\lambda}_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Hyperladung } [\hat{Y} = \frac{2}{\sqrt{3}} \hat{t}_8 = \frac{\hat{\lambda}_8}{\sqrt{3}}]$	
Infinitesimale Trafo	$\hat{U}(\delta\vec{\alpha}) = \hat{1}_3 + i \delta\alpha \hat{H} = e^{i\delta\alpha \hat{H}}$ mit $\hat{H} = \sum_{i=1}^8 \hat{\lambda}_i; \text{Tr}(\hat{H}) = 0$ (spurlos); $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$ (hermitesch)	
Lie-Algebra	$[\hat{t}_a, \hat{t}_b] = i \sum_{c=1}^8 f_{abc} \hat{t}_c$	Zyklische Vertauschbarkeit der Spur: $[\text{Tr}(\hat{t}_c [\hat{t}_a, \hat{t}_b]) = \text{Tr}(\hat{t}_a [\hat{t}_b, \hat{t}_c]) = \frac{i}{2} f_{abc}]$
Strukturkonstanten:	$f_{123} = 1; f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = \frac{1}{2}; f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2};$ $f_{abc} = f_{bca} = f_{cab} = -f_{bac} = -f_{acb} = -f_{cba}$ (antisymmetrisch). Alle anderen Strukturkonstanten gleich Null.	
Gewichtsoperatoren	$[\hat{T}_3, \hat{Y}] = 0 \Rightarrow \text{Multiplizitätszustände beschreibbar mit Gewichten } I_3 \text{ und } Y: \hat{T}_3 I_3, Y\rangle = I_3 I_3, Y\rangle \text{ und } \hat{Y} I_3, Y\rangle = Y I_3, Y\rangle$	
Leiteroperatoren	$\hat{T}_+ = \hat{t}_1 + i\hat{t}_2; \hat{T}_- = \hat{t}_1 - i\hat{t}_2; \hat{V}_+ = \hat{t}_4 + i\hat{t}_5; \hat{V}_- = \hat{t}_4 - i\hat{t}_5; \hat{U}_+ = \hat{t}_6 + i\hat{t}_7; \hat{U}_- = \hat{t}_6 - i\hat{t}_7$	
Wirkung der Leiteroperatoren auf die Gewichte I_3 und Y und Kommutatorrelationen	$[\hat{T}_3, \hat{T}_\pm] = \pm \hat{T}_\pm$ \hat{T}_+ erhöht T_3 um eins $[\hat{T}_3, \hat{U}_\pm] = -\frac{1}{2} \hat{U}_\pm$ \hat{U}_+ erniedrigt T_3 um $\frac{1}{2}$ $[\hat{T}_3, \hat{V}_\pm] = \pm \frac{1}{2} \hat{V}_\pm$ \hat{V}_+ erhöht T_3 um $\frac{1}{2}$ $[\hat{Y}, \hat{T}_\pm] = 0$ \hat{T}_\pm lässt Y unverändert $[\hat{Y}, \hat{U}_\pm] = \pm \hat{U}_\pm$ \hat{U}_+ erhöht Y um eins $[\hat{Y}, \hat{V}_\pm] = \pm \hat{V}_\pm$ \hat{V}_+ erhöht Y um eins	$[\hat{T}_3, \hat{T}_\pm] = \pm \hat{T}_\pm$ \hat{T}_- erniedrigt T_3 um eins $[\hat{T}_3, \hat{U}_\pm] = \frac{1}{2} \hat{U}_\pm$ \hat{U}_- erhöht T_3 um $\frac{1}{2}$ $[\hat{T}_3, \hat{V}_\pm] = -\frac{1}{2} \hat{V}_\pm$ \hat{V}_- erniedrigt T_3 um $\frac{1}{2}$ $[\hat{Y}, \hat{T}_\pm] = 0$ \hat{T}_- lässt Y unverändert $[\hat{Y}, \hat{U}_\pm] = -\hat{U}_\pm$ \hat{U}_- erniedrigt Y um eins $[\hat{Y}, \hat{V}_\pm] = \hat{V}_\pm$ \hat{V}_- erniedrigt Y um eins

SU(3) Flavor-Symmetrie der starken Wechselwirkung

Idee:	Die SU(2) Flavor-Symmetrie ist beinahe exakt, weil $m_u \approx m_d$. Weil \hat{H}_{strong} auf uds gleich wirkt, können wir das Strange-Quark mit der SU(3) einbinden. Die Symmetrie ist aber nicht perfekt wegen einer Differenz von ca. 100 MeV zwischen m_s und $m_{u/d}$.	
Symmetrie-Trafo	$\begin{pmatrix} u' \\ d' \\ s' \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$ mit $\hat{U} \dots$ 3x3 matrix; $\hat{U}\hat{U}^\dagger=1, \det(\hat{U})=1$	$\hat{U} = e^{i\vec{\alpha}\vec{T}} = e^{i\alpha_i \hat{T}_i}; i = 1 \dots 8$ with $[\hat{T}_i = \frac{1}{2} \hat{\lambda}_i]$
Isospin und Hyperladung	 $\hat{T}_3 u\rangle = +\frac{1}{2} u\rangle$ $\hat{Y} u\rangle = +\frac{1}{3} u\rangle$ $\hat{T}_3 d\rangle = -\frac{1}{2} d\rangle$ $\hat{Y} d\rangle = +\frac{1}{3} d\rangle$ $\hat{T}_3 s\rangle = 0$ $\hat{Y} s\rangle = -\frac{2}{3} s\rangle$ Total Isospin: $\hat{T}^2 = \sum_{i=1}^8 \hat{T}_i^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^8 \hat{\lambda}_i^2 = \frac{4}{3} \mathbb{1}_3$	Leiter Operatoren $\hat{T}_\pm = \hat{T}_1 \pm i\hat{T}_2$ $\hat{V}_\pm = \hat{T}_4 \pm i\hat{T}_5$ $\hat{U}_\pm = \hat{T}_6 \pm i\hat{T}_7$

Isospin, U-Spin und V-Spin

Isospin	Beschränkt man sich im Raum der Quarkzustände $ \psi\rangle = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$ auf spezielle unitäre Transformationen in den Zeilen 1 und 2, so beschränkt man sich auf die Isospin SU(2)-Untergruppe der SU(3). Die erzeugenden Operatoren sind dann: $\hat{T}_1 = \frac{\lambda_1}{2}; \hat{T}_2 = \frac{\lambda_2}{2}; \hat{T}_3 = \frac{\lambda_3}{2}$ bzw. $\hat{T}_4; \hat{T}_-; \hat{T}_3$
V-Spin	Beschränkt man sich im Raum der Quarkzustände auf spezielle unitäre Transformationen in den Zeilen 1 und 3, so beschränkt man sich auf die V-Spin SU(2)-Untergruppe der SU(3). Die erzeugenden Operatoren sind dann: $\hat{V}_1 = \frac{\lambda_4}{2}; \hat{V}_2 = \frac{\lambda_5}{2}; \hat{V}_3 = \frac{1}{4}(\lambda_3 + \sqrt{3}\lambda_8) = \frac{\hat{T}_3}{2} + \frac{3}{4}\hat{V} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
U-Spin	Beschränkt man sich im Raum der Quarkzustände auf spezielle unitäre Transformationen in den Zeilen 2 und 3, so beschränkt man sich auf die U-Spin SU(2)-Untergruppe der SU(3). Die erzeugenden Operatoren sind dann: $\hat{U}_1 = \frac{\lambda_6}{2}; \hat{U}_2 = \frac{\lambda_7}{2}; \hat{U}_3 = -\frac{\hat{T}_3}{2} + \frac{3}{4}\hat{V} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Multipletts	Isospin-Multiplett: $T_3 \in \{-T, \dots, T\}$; V-Spin-Multiplett: $V_3 \in \{-V, \dots, V\}$; U-Spin-Multiplett: $U_3 \in \{-U, \dots, U\}$

SU(3) Multipletts

<ul style="list-style-type: none"> SU(3) Multipletts haben im T_3-Y-Diagramm die Form eines Sechsecks mit 3-zähliger Symmetrie, das auch zu einem Dreieck entartet sein kann. Die Multipletts sind charakterisiert durch die Zahlen p und q Gitterpunkte am Rand sind einfach besetzt Die nächstinnere Schale ist zweifach besetzt, die nächste dreifach, etc. Sobald eine Schale zum Dreieck geworden ist, bleibt die Multiplizität gleich q+1 Dreieckige SU(3) Multipletts habe daher an jedem Gitterpunkt nur einen Zustand Die Multiplizität der einzelnen Punkte folgt aus den Kommutatorregeln zwischen den Leiteroperatoren 																					
Kommutatorregeln zwischen Leiteroperatoren <table border="0"> <tr> <td>$[\hat{T}_+, \hat{T}_-] = 2\hat{T}_3$</td> <td>$[\hat{V}_+, \hat{V}_-] = 2\hat{V}_3$</td> <td>$[\hat{U}_+, \hat{U}_-] = 2\hat{U}_3$</td> <td>... SU(2) Unteralgebra</td> </tr> <tr> <td>$[\hat{T}_+, \hat{V}_+] = 0$</td> <td>$[\hat{T}_+, \hat{U}_+] = 0$</td> <td>$[\hat{U}_+, \hat{V}_+] = 0$</td> <td>...60° zueinander</td> </tr> <tr> <td>$[\hat{T}_-, \hat{V}_-] = 0$</td> <td>$[\hat{T}_-, \hat{U}_-] = 0$</td> <td>$[\hat{U}_-, \hat{V}_-] = 0$</td> <td>...60° zueinander</td> </tr> <tr> <td>$[\hat{T}_+, \hat{V}_-] = -\hat{U}_-$</td> <td>$[\hat{T}_+, \hat{U}_+] = \hat{V}_+$</td> <td>$[\hat{U}_+, \hat{V}_-] = \hat{T}_-$</td> <td>...120° zueinander</td> </tr> <tr> <td>$[\hat{T}_-, \hat{V}_+] = \hat{U}_+$</td> <td>$[\hat{T}_-, \hat{U}_-] = -\hat{V}_-$</td> <td>$[\hat{U}_-, \hat{V}_+] = -\hat{T}_+$</td> <td>...120° zueinander</td> </tr> </table>	$[\hat{T}_+, \hat{T}_-] = 2\hat{T}_3$	$[\hat{V}_+, \hat{V}_-] = 2\hat{V}_3$	$[\hat{U}_+, \hat{U}_-] = 2\hat{U}_3$... SU(2) Unteralgebra	$[\hat{T}_+, \hat{V}_+] = 0$	$[\hat{T}_+, \hat{U}_+] = 0$	$[\hat{U}_+, \hat{V}_+] = 0$...60° zueinander	$[\hat{T}_-, \hat{V}_-] = 0$	$[\hat{T}_-, \hat{U}_-] = 0$	$[\hat{U}_-, \hat{V}_-] = 0$...60° zueinander	$[\hat{T}_+, \hat{V}_-] = -\hat{U}_-$	$[\hat{T}_+, \hat{U}_+] = \hat{V}_+$	$[\hat{U}_+, \hat{V}_-] = \hat{T}_-$...120° zueinander	$[\hat{T}_-, \hat{V}_+] = \hat{U}_+$	$[\hat{T}_-, \hat{U}_-] = -\hat{V}_-$	$[\hat{U}_-, \hat{V}_+] = -\hat{T}_+$...120° zueinander	
$[\hat{T}_+, \hat{T}_-] = 2\hat{T}_3$	$[\hat{V}_+, \hat{V}_-] = 2\hat{V}_3$	$[\hat{U}_+, \hat{U}_-] = 2\hat{U}_3$... SU(2) Unteralgebra																		
$[\hat{T}_+, \hat{V}_+] = 0$	$[\hat{T}_+, \hat{U}_+] = 0$	$[\hat{U}_+, \hat{V}_+] = 0$...60° zueinander																		
$[\hat{T}_-, \hat{V}_-] = 0$	$[\hat{T}_-, \hat{U}_-] = 0$	$[\hat{U}_-, \hat{V}_-] = 0$...60° zueinander																		
$[\hat{T}_+, \hat{V}_-] = -\hat{U}_-$	$[\hat{T}_+, \hat{U}_+] = \hat{V}_+$	$[\hat{U}_+, \hat{V}_-] = \hat{T}_-$...120° zueinander																		
$[\hat{T}_-, \hat{V}_+] = \hat{U}_+$	$[\hat{T}_-, \hat{U}_-] = -\hat{V}_-$	$[\hat{U}_-, \hat{V}_+] = -\hat{T}_+$...120° zueinander																		
Gesamtmultiplizität	$M(p, q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2)$																				
Einfache Multipletts:	Singulett: $(p=0, q=0)$ Triplett (fundamental): $(p=1, q=0)$ Antitriplett (fundamental): $(p=0, q=1)$ Oktett: $(p=1, q=1)$ Sextett: $(p=2, q=0)$ Antisextett: $(p=0, q=2)$																				
Passende Matrizen für Multipletts	Die 3x3-Matrizen $\{\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3, \hat{t}_4, \hat{t}_5, \hat{t}_6, \hat{t}_7, \hat{t}_8\}$ sind geeignete Generatoren für das Triplet. Für das Antitriplett werden andere 3x3-Matrizen benötigt. Für das Oktett benötigt man 8x8-Matrizen, für das Sextett 6x6-Matrizen, etc.																				
Casimiroperatoren	Casimiroperatoren vertauschen mit jedem Operator der Algebra. Jedem Punkt im Multiplett ist derselbe Eigenwert eines Casimiroperators zugeordnet. Da das Multiplett zwei Werte (p und q) zu seiner Charakterisierung benötigt, muss es auch zwei Casimiroperatoren geben.																				
quadratischer Casimiroop	$\hat{C}_1 = \sum_{i=1}^8 \hat{t}_i^2$ (entspricht quadratischer Farbladung) Casimiroperator 3. Ordnung: $\hat{C}_3 = \sum_{abc} d_{abc} \hat{t}_a \hat{t}_b \hat{t}_c$																				
Symmetrische Koeffizienten	$d_{118} = d_{228} = d_{338} = \frac{1}{\sqrt{3}}; d_{146} = d_{157} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = \frac{1}{2}; d_{247} = d_{366} = d_{377} = -\frac{1}{2};$ $d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}; d_{888} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; d_{abc} = d_{bac} = d_{acb} = \dots$ (symmetrisch). Alle anderen $d_{abc} = 0$.																				

Konstruktion eines SU(3) Multipletts

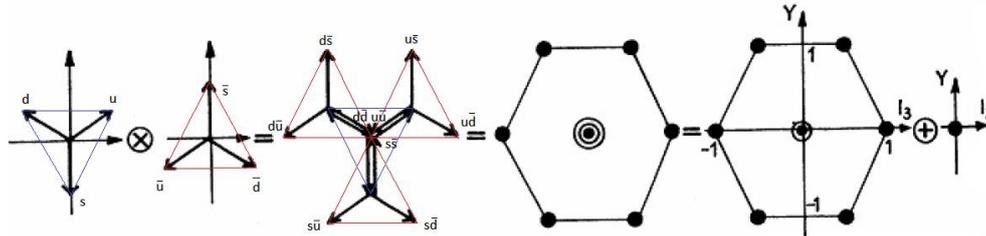
<ul style="list-style-type: none"> Jeder Zustand eines Multipletts kann aus einem beliebigen anderen Zustand desselben Multipletts durch die Anwendung von Leiteroperatoren erzeugt werden. Praktisch startet man am besten mit einem Eckpunkt, z.B. o.B.d.A mit dem Zustand $T_3^{min}\rangle$. Da dieser Zustand durch das linke Eck repräsentiert wird, ergeben die Operatoren \hat{T}_-, \hat{U}_+ und \hat{V}_- Null. Jeder beliebiger Weg, bestehend aus allen Leiteroperatoren, kann solange kommutiert werden, bis die Operatoren \hat{T}_-, \hat{U}_+ und \hat{V}_- rechts stehen, und daher verschwinden. Von den beim Kommutieren entstehenden Summanden verbleiben also nur solche, die aus den Operatoren \hat{T}_+, \hat{U}_- und \hat{V}_+ bestehen. Daraus folgt unmittelbar, dass es nur einen Zustand $T_3^{min}\rangle$ gibt, denn aus den Operatoren \hat{T}_+, \hat{U}_- und \hat{V}_+ kann kein Weg gebildet werden, der von $T_3^{min}\rangle$ weg- und wieder zurückführt. Ebenso können alle anderen Randpunkte mit den Operatoren \hat{T}_+, \hat{U}_- und \hat{V}_+ nur einmal erreicht werden und sind daher nur einmal besetzt. Für die Bestimmung der Multiplizität der inneren Punkte genügt es, sich auf das Sechstel in der Umgebung des Punktes $T_3^{min}\rangle$ zu beschränken. Die anderen Punkte konstruiert man besser von $T_3^{max}\rangle, V_3^{min}\rangle, V_3^{max}\rangle, U_3^{min}\rangle$ oder $U_3^{max}\rangle$ aus. Die Multiplizität eines inneren Punktes ergibt sich aus der Anzahl linear unabhängiger Wege von $T_3^{min}\rangle$ zu diesem Punkt. Um die linear unabhängigen Wege zu finden, wenden wir die Operatoren \hat{T}_+, \hat{U}_- und \hat{V}_+ in festgelegter Reihenfolge mehrfach an, wobei die Operatoren so geordnet werden, dass die Leiteroperatoren in Richtung der kürzeren Nachbarkante (hier: \hat{V}_+) ganz rechts stehen, links davon die Operatoren in Richtung der längeren Nachbarkante (hier: \hat{U}_-), und ganz am Anfang die \hat{T}_+-Operatoren: $(\hat{T}_+)^{n_T} (\hat{U}_-)^{n_U} (\hat{V}_+)^{n_V} T_3^{min}\rangle$

Quarks und Antiquarks

<p>Quarkzustände</p>	<p>Die Quarkzustände „up“, „down“ und „strange“ der leichten Quarks sind Eigenzustände von \hat{T}_3 und \hat{Y} und bilden das fundamentale SU(3) Triplet $(p, q) = (1, 0)$</p> $ u\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; d\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; s\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\hat{T}_+ d\rangle = u\rangle; \hat{V}_+ s\rangle = u\rangle; \hat{U}_+ s\rangle = d\rangle$ $\hat{T}_- u\rangle = d\rangle; \hat{V}_- u\rangle = s\rangle; \hat{U}_- d\rangle = s\rangle$ $\hat{T}_3 u\rangle = \frac{1}{2} u\rangle; \hat{T}_3 d\rangle = -\frac{1}{2} d\rangle; \hat{T}_3 s\rangle = 0 s\rangle; \hat{Y} u\rangle = \frac{1}{3} u\rangle; \hat{Y} d\rangle = \frac{1}{3} d\rangle; \hat{Y} s\rangle = -\frac{2}{3} s\rangle$	
<p>Elektrische Quarkladung (Gell-Mann-Nishijima-Beziehung)</p>	$Q = \left(\frac{Y}{2} + T_3\right)e$ <p>Ausgehend vom Ladungsschwerpunkt $\frac{Y}{2}$ addieren/subtrahieren wir die T_3-fache Elementarladungen.</p> $Q(u) = \frac{1/3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2}{3}e \quad Q(d) = \frac{1/3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{1}{3}e \quad Q(s) = \frac{-2/3}{2} + 0 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}e$ <p>ungeradzahlig!</p>	
<p>Antiquarkzustände</p>	<p>Das elementare SU(3)-Antitriplett $(p, q) = (0, 1)$ wird mit den Antiquarkzustände $\bar{u}\rangle, \bar{d}\rangle$ und $\bar{s}\rangle$ identifiziert. Diese sind nicht in der Basis $\{ u\rangle, d\rangle, s\rangle\}$ darstellbar (d.h. Quark- und Antiquarkzustände sind nicht durch eine unitäre Trafo ineinander überführbar).</p> <p>Beweis: Wir erwarten z.B. $\hat{T}_3 \bar{s}\rangle = 0 \bar{s}\rangle \dots (1)$ und $\hat{Y} \bar{s}\rangle = \frac{2}{3} \bar{s}\rangle \dots (2)$.</p> $(1) \Rightarrow \hat{T}_3 \bar{s}\rangle \rightarrow \hat{t}_3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hat{\lambda}_3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \\ c \text{ beliebig} \end{matrix} \dots (3)$ $(2) \Rightarrow \hat{Y} \bar{s}\rangle \rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \hat{t}_8 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{\lambda}_8 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a \\ b \\ -2c \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \frac{2}{3} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3a = 2/3a \\ 1/3b = 2/3b \\ -2/3c = 2/3c \end{matrix} \dots (4)$ $(3), (4) \Rightarrow \bar{s}\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{T}_3 \bar{u}\rangle = -\frac{1}{2} \bar{u}\rangle; \hat{T}_3 \bar{d}\rangle = \frac{1}{2} \bar{d}\rangle; \hat{T}_3 \bar{s}\rangle = 0 \bar{s}\rangle; \hat{Y} \bar{u}\rangle = -\frac{1}{3} \bar{u}\rangle; \hat{Y} \bar{d}\rangle = -\frac{1}{3} \bar{d}\rangle; \hat{Y} \bar{s}\rangle = \frac{2}{3} \bar{s}\rangle$	
<p>Generatoren der Antiquarkzustände</p>	<p>In der Antiquarkbasis $\bar{u}\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{d}\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{s}\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt es andere Generatoren $\{\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3, \hat{t}_4, \hat{t}_5, \hat{t}_6, \hat{t}_7, \hat{t}_8\}$.</p> <p>2 Bedingungen: (1) Die Eigenwerte von \hat{T}_3 und \hat{Y} sind entgegengesetzt zu \hat{T}_3 und \hat{Y}, (2) Erhaltung der Kommutatorregeln $\Rightarrow \hat{t}_i = -\hat{t}_i^* \Rightarrow \hat{T}_+ \bar{u}\rangle = - \bar{d}\rangle; \hat{V}_+ \bar{u}\rangle = - \bar{s}\rangle; \hat{U}_+ \bar{d}\rangle = - \bar{s}\rangle; \hat{T}_- \bar{d}\rangle = - \bar{u}\rangle; \hat{V}_- \bar{s}\rangle = - \bar{u}\rangle; \hat{U}_- \bar{s}\rangle = - \bar{d}\rangle$</p>	
<p>Antiquarkzustände:</p>		$\hat{T}_3 \bar{u}\rangle = -\frac{1}{2} \bar{u}\rangle \quad \hat{V}_+ \bar{u}\rangle = - \bar{s}\rangle$ $\hat{T}_3 \bar{d}\rangle = +\frac{1}{2} \bar{d}\rangle \quad \hat{V}_- \bar{s}\rangle = - \bar{u}\rangle$ $\hat{T}_3 \bar{s}\rangle = 0 \quad \hat{U}_+ \bar{d}\rangle = - \bar{s}\rangle$ $\hat{Y} \bar{u}\rangle = -\frac{1}{3} \bar{u}\rangle \quad \hat{U}_- \bar{s}\rangle = - \bar{d}\rangle$ $\hat{Y} \bar{d}\rangle = -\frac{1}{3} \bar{d}\rangle \quad \hat{T}_+ \bar{u}\rangle = - \bar{d}\rangle$ $\hat{Y} \bar{s}\rangle = +\frac{2}{3} \bar{s}\rangle \quad \hat{T}_- \bar{d}\rangle = - \bar{u}\rangle$

Kopplung von Quark und Antiquark ($q\bar{q}$) zu einem Mesonen-Oktett (und einem Singulett)

- Durch Kopplung eines Quarktripletts $\mathbf{3}$ mit einem Antiquarktriplett $\bar{\mathbf{3}}$ können insg. 9 Quark-Antiquark-Zustände gebildet werden, die Mesonen repräsentieren. Sie spalten in ein Oktett und ein Singulett auf: $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$, wie hier hergeleitet wird.
- Grafische Herleitung: Die Eckpunkte des Quarktripletts $\mathbf{3}$ sind die Mittelpunkte der drei gekoppelten Antitriplets $\bar{\mathbf{3}}$. Dadurch entsteht ein Sechseck mit sechs einfach besetzten äußeren Zuständen und einem dreifach besetzten Mittelpunkt.



- In einem SU(3) Multipllett ist jeder Punkt der äußeren Schale einfach besetzt, und jeder Punkt der nächst innere Schale (wenn die äußere Schale kein Dreieck war) zweifach besetzt. Die äußere Schale ist hier ein Sechseck, die nächst innere Schale ist der Mittelpunkt, der also nur zweifach besetzt sein sollte (aber hier dreifach besetzt ist). Daher zerfällt das Sechseck mit dem dreifach besetzten Mittelpunkt in ein Sechseck mit zweifach besetztem Mittelpunkt (ein Oktett) und ein weiteres Singulett (der zusätzlich besetzte Punkt in der Mitte).
- Die sechs Randzustände des Oktetts $\mathbf{8}$ sind eindeutig (Quantenzahl $I = I_3^{max} = 1$, $\phi_8(I, I_3, Y)$):

$$\phi_8 \left(1, -\frac{1}{2}, +1\right) = |d\bar{s}\rangle, \phi_8 \left(1, +\frac{1}{2}, +1\right) = |u\bar{s}\rangle, \phi_8(1, +1, 0) = |u\bar{d}\rangle, \phi_8 \left(1, +\frac{1}{2}, -1\right) = |s\bar{d}\rangle, \phi_8 \left(1, -\frac{1}{2}, -1\right) = |s\bar{u}\rangle, \phi_8 \left(1, -\frac{1}{2}, 0\right) = |d\bar{u}\rangle$$

- Der erste Zustand in der Mitte $\phi_8^{C1}(1, 0, 0)$ kann mit Leiteroperatoren hergeleitet werden:

$$\text{Wir wählen } \phi_8^{C1}(1, 0, 0) = \hat{T}_- |u\bar{d}\rangle = \hat{T}_-^{(1)} |u\bar{d}\rangle + \hat{T}_-^{(2)} |u\bar{d}\rangle \xrightarrow{norm} \phi_8^{C1}(1, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle) \dots (1)$$

- Der zweite Zustand in der Mitte $\phi_8^{C2}(1, 0, 0)$ kann mit weiteren Leiteroperatoren hergeleitet werden:

$$\hat{V}_- |u\bar{s}\rangle \xrightarrow{norm} \frac{1}{\sqrt{2}} (|s\bar{s}\rangle - |u\bar{u}\rangle) \dots (2) \quad \hat{U}_- |d\bar{s}\rangle \xrightarrow{norm} \frac{1}{\sqrt{2}} (|s\bar{s}\rangle - |d\bar{d}\rangle) \dots (3) \quad \text{Superposition: } \phi_8^{C2}(1, 0, 0) = \alpha \frac{|s\bar{s}\rangle - |u\bar{u}\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{|s\bar{s}\rangle - |d\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}} \dots (4)$$

$$\text{mit: } \langle C1|C2\rangle = 0 \text{ und } \alpha^2 + \beta^2 = 1 \Rightarrow \phi_8^{C2}(1, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{6}} (2|s\bar{s}\rangle - |u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle)$$

Das Mesonen-Singulett

- Fehlender Zustand in der Mitte des Multipletts ist ein Singulett. Ansatz: $|\mathbf{1}\rangle = \alpha|u\bar{u}\rangle + \beta|d\bar{d}\rangle + \gamma|s\bar{s}\rangle \dots (1)$

Wir wissen: Jeder Leiteroperator angewandt auf $|\mathbf{1}\rangle$ muss 0 ergeben. Daher: $\hat{T}_+ |\mathbf{1}\rangle = 0 \Rightarrow \hat{T}_+ (\alpha|u\bar{u}\rangle + \beta|d\bar{d}\rangle + \gamma|s\bar{s}\rangle) = 0 \Rightarrow$

$$(\hat{T}_+^{(1)} + \hat{T}_+^{(2)}) (\alpha|u\bar{u}\rangle + \beta|d\bar{d}\rangle + \gamma|s\bar{s}\rangle) = 0 \Rightarrow \hat{T}_+^{(1)} (\alpha|u\bar{u}\rangle + \beta|d\bar{d}\rangle + \gamma|s\bar{s}\rangle) + \hat{T}_+^{(2)} (\alpha|u\bar{u}\rangle + \beta|d\bar{d}\rangle + \gamma|s\bar{s}\rangle) = 0 \Rightarrow$$

$$(0 + \beta|u\bar{d}\rangle + 0) + (-\alpha|u\bar{d}\rangle + 0 + 0) = 0 \Rightarrow \beta|u\bar{d}\rangle - \alpha|u\bar{d}\rangle = 0 \Rightarrow \beta|u\bar{d}\rangle = \alpha|u\bar{d}\rangle \Rightarrow \alpha = \beta \dots (2)$$

Wieder: Jeder Leiteroperator, der auf $|\mathbf{1}\rangle$ wirkt, liefert 0. Daher: $\hat{V}_- |\mathbf{1}\rangle = 0 \Rightarrow \hat{V}_- (\alpha|u\bar{u}\rangle + \beta|d\bar{d}\rangle + \gamma|s\bar{s}\rangle) = 0 \Rightarrow$

$$(\hat{V}_-^{(1)} + \hat{V}_-^{(2)}) (\alpha|u\bar{u}\rangle + \beta|d\bar{d}\rangle + \gamma|s\bar{s}\rangle) = 0 \Rightarrow \hat{V}_-^{(1)} (\alpha|u\bar{u}\rangle + \beta|d\bar{d}\rangle + \gamma|s\bar{s}\rangle) + \hat{V}_-^{(2)} (\alpha|u\bar{u}\rangle + \beta|d\bar{d}\rangle + \gamma|s\bar{s}\rangle) = 0 \Rightarrow$$

$$(\alpha|s\bar{u}\rangle + 0 + 0) + (0 + 0 - \gamma|s\bar{u}\rangle) = 0 \Rightarrow \alpha|s\bar{u}\rangle - \gamma|s\bar{u}\rangle = 0 \Rightarrow \alpha = \gamma \dots (3) \quad (1) \stackrel{(2),(3)}{\Rightarrow} |\mathbf{1}\rangle = \alpha|u\bar{u}\rangle + \alpha|d\bar{d}\rangle + \alpha|s\bar{s}\rangle \dots (4)$$

$$\text{Normierung: } \langle \mathbf{1}|\mathbf{1}\rangle = 1 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 = 3\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \stackrel{(4)}{\Rightarrow} |\mathbf{1}\rangle = \phi_1(0, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{3}} (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle) \quad (\text{as } I = I_3^{max} = 0)$$

L=0 Mesonen: Pseudoskalare Mesonen

Quark/Antiquark-Zustände mit Bahndrehimpuls $[\ell = 0]$, und Spin $[s = 0] \Rightarrow$ Gesamtdrehimpuls $[J = \ell + s = 0] \Rightarrow$
 Kopple anti-symmetrisierte Zustände ϕ_8 und ϕ_1 mit anti-symmetrischem Singlet-Spin-Zustand $\chi_A(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$
 Negative Parität: $P(q\bar{q}) = (+1)(-1)(-1)^\ell = -1$, Massendifferenzen weil $m_s > m_{u/d}$

Pseudo-skalare Mesonen		$\pi^0: 135 \text{ MeV} \dots \frac{1}{\sqrt{4}} (u\bar{u}\rangle - d\bar{d}\rangle - \bar{u}u\rangle + \bar{d}d\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\rangle)$ $\pi^-: 140 \text{ MeV} \dots \frac{1}{\sqrt{2}} (d\bar{u}\rangle - \bar{u}d\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\rangle)$ $\pi^+: 140 \text{ MeV} \dots \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{d}\rangle - \bar{d}u\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\rangle)$ $K^-: 494 \text{ MeV} \dots \frac{1}{\sqrt{2}} (s\bar{u}\rangle - \bar{u}s\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\rangle)$ $K^+: 494 \text{ MeV} \dots \frac{1}{\sqrt{2}} (s\bar{d}\rangle - \bar{d}s\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\rangle)$ $K^0: 498 \text{ MeV} \dots \frac{1}{\sqrt{2}} (d\bar{s}\rangle - \bar{s}d\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\rangle)$ $\bar{K}^0: 498 \text{ MeV} \dots \frac{1}{\sqrt{2}} (s\bar{d}\rangle - \bar{d}s\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\rangle)$ $\eta: 548 \text{ MeV} \dots \frac{1}{\sqrt{12}} (u\bar{u}\rangle + d\bar{d}\rangle - 2 s\bar{s}\rangle - \bar{u}u\rangle - \bar{d}d\rangle + 2 \bar{s}s\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\rangle)$ $\eta': 958 \text{ MeV} \dots \frac{1}{\sqrt{12}} (u\bar{u}\rangle + d\bar{d}\rangle + s\bar{s}\rangle - \bar{u}u\rangle - \bar{d}d\rangle - \bar{s}s\rangle - \bar{u}u\rangle - \bar{d}d\rangle - \bar{s}s\rangle + u\bar{u}\rangle + d\bar{d}\rangle + s\bar{s}\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\rangle - \downarrow\uparrow\rangle)$
		$m = m_1 + m_2 + \frac{A}{m_1 m_2} (\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2) = m_1 + m_2 + \frac{A}{m_1 m_2} \frac{1}{2} (\langle \hat{S}^2 \rangle - \langle \hat{S}_1^2 \rangle - \langle \hat{S}_2^2 \rangle) = m_1 + m_2 + \frac{A}{m_1 m_2} \frac{1}{2} (0 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)) \Rightarrow$ $m = m_1 + m_2 - \frac{3}{4} \frac{A}{m_1 m_2} \quad m_d = m_u = 0.307 \text{ GeV}, m_s = 0.490 \text{ GeV}, A = 0.06 \text{ GeV}^3 \text{ (erklärt die Masse von } \eta' \text{ nicht korrekt!)}$

L=0 Mesonen: Vektor-Mesonen

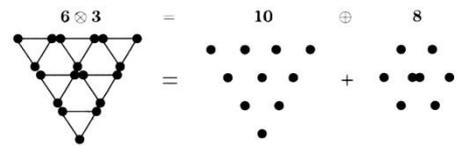
Quark/Antiquark-Zustände mit Bahndrehimpuls $[\ell = 0]$, und Spin $[s = 1] \Rightarrow$ Gesamtdrehimpuls $[J = \ell + s = 1] \Rightarrow$ Kopple symmetrisierte Zustände ϕ_8 und ϕ_1 mit einem der symmetrischen Triplet-Spin-Zustände $\chi_S(1, +1)$, $\chi_S(1, 0)$, oder $\chi_S(1, -1)$ Negative Parität: $P(q\bar{q}) = (+1)(-1)(-1)^\ell = -1$. Höhere Massen wegen der Spin-Spin Wechselwirkung	
Vektor Mesonen	
Massen:	$m = m_1 + m_2 + \frac{A}{m_1 m_2} \frac{1}{2} (\langle \hat{S}_1^2 \rangle - \langle \hat{S}_1^2 \rangle - \langle \hat{S}_2^2 \rangle) = m_1 + m_2 + \frac{A}{m_1 m_2} \frac{1}{2} (1(1+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)) \Rightarrow$ $m = m_1 + m_2 + \frac{1}{4} \frac{A}{m_1 m_2} \quad m_d = m_u = 0.307 \text{ GeV}, m_s = 0.490 \text{ GeV}, A = 0.06 \text{ GeV}^3$
$\begin{aligned} \rho^0 &: 775 \text{ MeV} \dots \frac{1}{\sqrt{4}} (u\bar{u}\rangle - d\bar{d}\rangle + \bar{u}u\rangle - \bar{d}d\rangle) \chi_S \\ \rho^- &: 775 \text{ MeV} \dots \frac{1}{\sqrt{2}} (d\bar{u}\rangle + \bar{u}d\rangle) \chi_S \\ \rho^+ &: 775 \text{ MeV} \dots \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{d}\rangle + \bar{d}u\rangle) \chi_S \\ K^{*-} &: 892 \text{ MeV} \dots \frac{1}{\sqrt{2}} (s\bar{u}\rangle + \bar{u}s\rangle) \chi_S \\ K^{*+} &: 892 \text{ MeV} \dots \frac{1}{\sqrt{2}} (s\bar{d}\rangle + \bar{d}s\rangle) \chi_S \\ K^{*0} &: 896 \text{ MeV} \dots \frac{1}{\sqrt{2}} (d\bar{s}\rangle + \bar{s}d\rangle) \chi_S \\ \bar{K}^{*0} &: 896 \text{ MeV} \dots \frac{1}{\sqrt{2}} (s\bar{d}\rangle + \bar{d}s\rangle) \chi_S \\ \omega &: 783 \text{ MeV} \dots \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u}\rangle + d\bar{d}\rangle) \chi_S \text{ (sic!)} \\ \Phi &: 1020 \text{ MeV} \dots s\bar{s}\rangle \chi_S \text{ (sic!)} \end{aligned}$ beobachtete ω und Φ sind Mischungen aus ϕ_8 und ϕ_1 Zuständen!	

Kopplung von zwei Quarks zu einem (hypothetischen) qq Sextett and qq Anti-Triplett

Hinweis: Gebundene Zwei-Quark-Zustände, die u, d und s kombinieren, sind hypothetisch, da sich die Gesamtfarbe nicht zu weiß addieren kann. Aber dieses Konzept dient als Grundlage für die Kombination von drei Quarks zu einem Triplett-Baryon-Zustand.	
<ul style="list-style-type: none"> Durch Kopplung eines Quarktripletts $\mathbf{3}$ mit einem weiteren Quarktriplett $\mathbf{3}$ können insg. 9 Quark-Zustände gebildet werden. Sie spalten in ein Sextett und ein Antitriplett auf: $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6}_S \oplus \mathbf{\bar{3}}_A$, wie hier hergeleitet wird. Grafische Herleitung: Die Eckpunkte des ersten Quarktripletts $\mathbf{3}$ sind die Mittelpunkte der zweiten gekoppelten Tripletts $\mathbf{3}$. Dadurch entsteht ein dreieckiges Sextett $\mathbf{6}_S$ mit sechs einfach besetzten äußeren Zuständen und weiteres dreieckiges Antitriplett $\mathbf{\bar{3}}_A$ mit drei einfach besetzten Zuständen. Die drei Eckpunkte des Sextetts $\mathbf{6}_S$ $\phi_{6_S}(I, I_3, Y)$ (Quantenzahl $I = I_3^{max} = 1$) sind direkt ablesbar: $\phi_{6_S}(1, +1, +\frac{2}{3}) = uu\rangle, \phi_{6_S}(1, -1, +\frac{2}{3}) = dd\rangle, \phi_{6_S}(1, 0, -\frac{4}{3}) = ss\rangle$ Die anderen drei Zustände des Sextetts $\mathbf{6}_S$ sind über Leiteroperatoren erreichbar: <ul style="list-style-type: none"> $\phi_{6_S}(1, 0, +\frac{2}{3}) = \hat{T}_+ dd\rangle = \hat{T}_+^{(1)} dd\rangle + \hat{T}_+^{(2)} dd\rangle \xrightarrow{norm} \phi_{6_S}(1, 0, +\frac{2}{3}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (ud\rangle + du\rangle)$ $\phi_{6_S}(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) = \hat{U}_- dd\rangle = \hat{U}_-^{(1)} dd\rangle + \hat{U}_-^{(2)} dd\rangle \xrightarrow{norm} \phi_{6_S}(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (sd\rangle + ds\rangle)$ $\phi_{6_S}(1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) = \hat{V}_- uu\rangle = \hat{V}_-^{(1)} uu\rangle + \hat{V}_-^{(2)} uu\rangle \xrightarrow{norm} \phi_{6_S}(1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (su\rangle + us\rangle)$ Der erste Anti-Triplettzustand ergibt sich aus Normierung und Orthogonalitätsbedingung: Ansatz: $\phi_{\bar{3}_A}(0, 0, +\frac{2}{3}) = \alpha ud\rangle + \beta du\rangle \dots$ (1) Orthogonalität: $\langle \phi_{6_S}(1, 0, +\frac{2}{3}) \phi_{\bar{3}_A}(0, 0, +\frac{2}{3}) \rangle = 0 \Rightarrow \frac{(1)}{\sqrt{2}} (ud\rangle + du\rangle) (\alpha ud\rangle + \beta du\rangle) = 0 \Rightarrow$ $\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle ud ud\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \langle du du\rangle = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha \Rightarrow \phi_{\bar{3}_A}(0, 0, +\frac{2}{3}) = \alpha ud\rangle - \alpha du\rangle \dots$ (2) Normierung: $\alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi_{\bar{3}_A}(0, 0, +\frac{2}{3}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (ud\rangle - du\rangle)$ Die anderen beiden Antitriplett-Zustände ergeben sich aus Leiteroperatoren: <ul style="list-style-type: none"> $\phi_{\bar{3}_A}(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) = \hat{V}_- \frac{ ud\rangle - du\rangle}{\sqrt{2}} = \hat{V}_-^{(1)} \frac{ ud\rangle - du\rangle}{\sqrt{2}} + \hat{V}_-^{(2)} \frac{ ud\rangle - du\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{ sd\rangle - ds\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{0 - ds\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{norm} \phi_{\bar{3}_A}(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (sd\rangle - ds\rangle)$ $\phi_{\bar{3}_A}(0, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) = \hat{U}_- \frac{ ud\rangle - du\rangle}{\sqrt{2}} = \hat{U}_-^{(1)} \frac{ ud\rangle - du\rangle}{\sqrt{2}} + \hat{U}_-^{(2)} \frac{ ud\rangle - du\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{0 - su\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{ us\rangle - 0}{\sqrt{2}} \xrightarrow{norm} \phi_{\bar{3}_A}(0, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (us\rangle - su\rangle)$ 	

Kopplung von drei Quarks zu L=0 Baryonen (qqq)

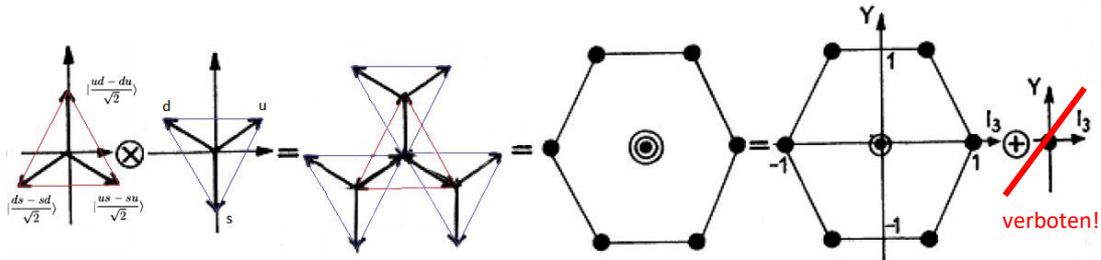
Wir suchen die Ausreduktion von $3 \otimes 3 \otimes 3$ (das sind 27 Zustände). Wir haben oben hergeleitet: $3 \otimes 3 = 6_S \oplus \bar{3}_A$, daher ergibt sich: $3 \otimes 3 \otimes 3 = (6_S \oplus \bar{3}_A) \otimes 3 \Rightarrow 3 \otimes 3 \otimes 3 = 6_S \otimes 3 \oplus \bar{3}_A \otimes 3$



Kopplung $6_S \otimes 3$ (18 Zustände): Die Punkte des symmetrischen Quarksextetts 6_S sind die Mittelpunkte des dritten gekoppelten Quarktripletts. Dadurch entsteht ein Dreieck mit drei einfachen Eckpunkten, sechs doppelt besetzten Punkten entlang der Außenlinien, und einem dreifach besetzten Mittelpunkt. Bei einem dreieckigen Multipllett können aber alle Außenpunkte nur einfach besetzt sein, und die inneren Schalen (hier: der Mittelpunkt) ebenfalls nur einmal. Daher zerfällt das beschriebene Dreieck in ein dreieckiges Dekuplett **10** (mit neun einfach besetzten Punkten am Rand und einem einfach besetzten Punkt in der Mitte) und ein sechseckiges Oktett **8** (mit sechs einfach besetzte Eckpunkten und einem doppelt besetzten Punkt in der Mitte). Somit: $6_S \otimes 3 = 10_S \oplus 8_{MS}$

(Details siehe nächste Seite)

Kopplung $\bar{3}_A \otimes 3$ (9 Zustände): Die Punkte des antisymmetrischen Tripletts $\bar{3}_A$ sind die Mittelpunkte des zusätzlich gekoppelten Tripletts



In einem SU(3) Multipllett ist jeder Punkt der äußeren Schale einfach besetzt, und jeder Punkt der nächst innere Schale (wenn die äußere Schale kein Dreieck war) zweifach besetzt. Die äußere Schale ist hier ein Sechseck, die nächst innere Schale ist der Mittelpunkt, der also nur zweifach besetzt sein sollte (aber hier dreifach besetzt ist). Daher zerfällt das Sechseck mit dem dreifach besetzten Mittelpunkt in ein Sechseck mit zweifach besetzten Mittelpunkt (ein Oktett) und ein weiteres Singulett (der zusätzlich besetzte Punkt in der Mitte). Somit:

$$\bar{3}_A \otimes 3 = 8_{MA} \oplus 1_A \quad (\text{Details siehe übernächste Seite})$$

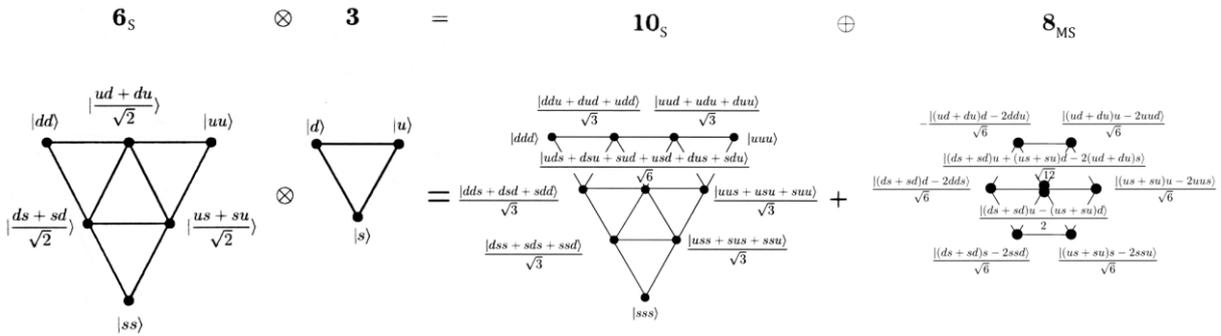
Insgesamt lässt sich das Dreiquarkmultipllett mit 27 Zuständen daher so ausreduzieren:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = (6_S \oplus \bar{3}_A) \otimes 3 = 6_S \otimes 3 \oplus \bar{3}_A \otimes 3 = (10_S \oplus 8_{MS}) \oplus (8_{MA} \oplus 1_A)$$

Symmetrien $\Psi = \phi_{flavor} \chi_{spin} \xi_{color} \eta_{space}$ Quarks sind Fermionen $\Rightarrow \Psi \stackrel{!}{=} \Psi_A$. Immer: $\xi_{color} = \xi_A$ mit $L = 0$: $\eta_{space} = \eta_S \Rightarrow \Psi_A = \phi_{flavor} \chi_{spin} \xi_A \eta_S \Rightarrow \phi_{flavor} \chi_{spin}$ muss symmetrisch sein (für $L = 0$) \Rightarrow Ein Baryonen-Singulett 1_A kann es im Grundzustand $L = 0$ nicht geben, weil es keine antisymmetrische Dreiteilchen-Spinfunktion χ_A gibt.

Das symmetrische Dekuplett und gemischt symmetrische Oktett der leichten Baryonenzustände

- Wie auf der vorigen Seite beschrieben: Bei der Kopplung $6_s \otimes 3$ (18 Zustände) entsteht ein dreieckiges (symmetrisches) Dekuplett 10_s (mit neun einfach besetzten Punkten am Rand und einem einfach besetzten Punkt in der Mitte) und ein sechseckiges (gemischt symmetrisches) Oktett 8_{MS} :



- Die drei Eckpunkte des Dekupletts 10_s sind direkt ablesbar $|\mathbf{10}_1\rangle = |ddd\rangle, |\mathbf{10}_2\rangle = |uuu\rangle, |\mathbf{10}_3\rangle = |sss\rangle$

- Die anderen sechs Randpunkte des Dekupletts sind über Leiteroperatoren erreichbar:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{10}_4\rangle &= \hat{T}_+ |ddd\rangle \xrightarrow{\text{norm}} |\mathbf{10}_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|udd\rangle + |dud\rangle + |ddu\rangle) & |\mathbf{10}_5\rangle &= \hat{T}_- |uuu\rangle \xrightarrow{\text{norm}} |\mathbf{10}_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|duu\rangle + |udu\rangle + |uud\rangle) \\
 |\mathbf{10}_6\rangle &= \hat{U}_- |ddd\rangle \xrightarrow{\text{norm}} |\mathbf{10}_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|sdd\rangle + |dsd\rangle + |dds\rangle) & |\mathbf{10}_7\rangle &= \hat{V}_- |uuu\rangle \xrightarrow{\text{norm}} |\mathbf{10}_7\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|suu\rangle + |usu\rangle + |uus\rangle) \\
 |\mathbf{10}_8\rangle &= \hat{U}_+ |sss\rangle \xrightarrow{\text{norm}} |\mathbf{10}_8\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|dss\rangle + |sds\rangle + |ssd\rangle) & |\mathbf{10}_9\rangle &= \hat{V}_+ |sss\rangle \xrightarrow{\text{norm}} |\mathbf{10}_9\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|uss\rangle + |sus\rangle + |uus\rangle)
 \end{aligned}$$

- Auch der Punkt in der Mitte des Dekupletts 10_s ist über Leiteroperatoren erreichbar, z.B.:

$$|\mathbf{10}_{10}\rangle = \hat{T}_+ |\mathbf{10}_6\rangle = \hat{T}_+ (|sdd\rangle + |dsd\rangle + |dds\rangle) \xrightarrow{\text{norm}} |\mathbf{10}_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|usd\rangle + |uds\rangle + |sud\rangle + |dus\rangle + |sdu\rangle + |dsu\rangle)$$

- Den ersten Punkt des (gemischt symmetrischen) Oktetts 8_{MS} ermitteln wir mit Orthogonalitäts- und Normierungsbedingung.

z.B. linker oberer Punkt; Ansatz $|\mathbf{8}_1^{MS}\rangle = \alpha|dd\rangle|u\rangle + \beta \frac{|ud\rangle+|du\rangle}{\sqrt{2}}|d\rangle = \alpha|ddu\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|udd\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|dud\rangle \dots (1)$

Orthogonalität: $\langle \mathbf{10}_4 | \mathbf{8}_1^{MS} \rangle = 0 \xrightarrow{(1)} \frac{\langle udd|+|dud|+|ddu\rangle}{\sqrt{3}} (\alpha|ddu\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|udd\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}|dud\rangle) = 0 \Rightarrow \alpha = -\sqrt{2}\beta \xrightarrow{(1)} \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Normierung: $\langle \mathbf{8}_1 | \mathbf{8}_1 \rangle = 1 \Rightarrow |\mathbf{8}_1^{MS}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|udd\rangle + |dud\rangle - 2|ddu\rangle)$

- Weitere fünf Randpunkte des Oktetts 8_{MS} sind über Leiteroperatoren erreichbar:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{8}_2^{MS}\rangle &= \hat{T}_+ |\mathbf{8}_1\rangle \xrightarrow{\text{norm}} |\mathbf{8}_2^{MS}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(2|uud\rangle - |udu\rangle - |duu\rangle) & |\mathbf{8}_3^{MS}\rangle &= \hat{U}_- |\mathbf{8}_2\rangle \xrightarrow{\text{norm}} |\mathbf{8}_3^{MS}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(2|uus\rangle - |usu\rangle - |suu\rangle) \\
 |\mathbf{8}_4^{MS}\rangle &= \hat{V}_- |\mathbf{8}_3\rangle \xrightarrow{\text{norm}} |\mathbf{8}_4^{MS}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|sus\rangle + |uss\rangle - 2|ssu\rangle) & |\mathbf{8}_5^{MS}\rangle &= \hat{T}_- |\mathbf{8}_4\rangle \xrightarrow{\text{norm}} |\mathbf{8}_5^{MS}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|dss\rangle + |sds\rangle - 2|ssd\rangle) \\
 |\mathbf{8}_6^{MS}\rangle &= \hat{U}_+ |\mathbf{8}_5\rangle \xrightarrow{\text{norm}} |\mathbf{8}_6^{MS}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(2|dds\rangle - |dsd\rangle - |sdd\rangle)
 \end{aligned}$$

- Der erste Punkt in der Mitte des Oktetts 8_{MS} ist ebenfalls über Leiteroperatoren erreichbar, z.B.:

$$|\mathbf{8}_7^{MS}\rangle = \hat{T}_+ |\mathbf{8}_6^{MS}\rangle \xrightarrow{\text{norm}} |\mathbf{8}_7^{MS}\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}(2|uds\rangle + 2|dus\rangle - |usd\rangle - |sud\rangle - |dsu\rangle - |sdu\rangle)$$

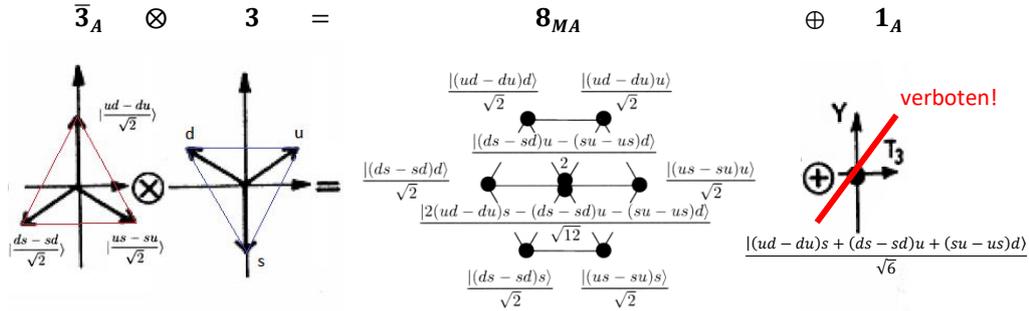
- Herleitung des zweiten Zustands in der Mitte des Oktetts 8_{MS} durch weitere Leiteroperatoren, Orthogonalität und Normierung:

Ansatz: $|\mathbf{8}_8^{MS}\rangle = \alpha \hat{U}_+ |\mathbf{8}_4^{MS}\rangle + \beta \hat{V}_+ |\mathbf{8}_5^{MS}\rangle$, orthogonality: $\langle \mathbf{8}_7^{MS} | \mathbf{8}_8^{MS} \rangle = 0 \xrightarrow{\text{Norm}} |\mathbf{8}_8^{MS}\rangle = \frac{1}{2}(|sud\rangle + |usd\rangle - |dsu\rangle - |sdu\rangle)$

beobachtetes 10_s Spin $\frac{3}{2}$ Dekupletts mit $\Psi_A = \phi_s \chi_s \xi_A \eta_s$		beobachtetes 8_{MS} Spin $\frac{1}{2}$ Oktett with $\Psi_A = \frac{\phi_{MS} \chi_{MS} \xi_A \eta_s}{\text{sym.}}$	
$L = 0, P = 1, S = \frac{3}{2}, J = \frac{3}{2}$		$L = 0, P = 1, S = \frac{3}{2}, J = \frac{1}{2}$	
$\Delta^- (ddd)$	$\Delta^0 (ddu)$	$n (ddu)$	$p (uud)$
$\Delta^+ (duu)$	$\Delta^{++} (uuu)$	$\Sigma^- (dds)$	$\Sigma^0 (uds)$
		$\Sigma^+ (uus)$	$\Lambda (uds)$
$\Xi^{*-} (ssd)$	$\Xi^{*-0} (ssu)$	$\Xi^- (ssd)$	$\Xi^0 (ssu)$
$\Omega^- (sss)$			
1232 MeV		940 MeV	
1385 MeV		1120-1190 MeV	
1533 MeV		1320 MeV	
1677 MeV			
Massen ungleich, weil das s-Quark schwerer ist als u und d		Massen ungleich, weil das s-Quark schwerer ist als u und d	
Baryonen Massen:	$m = m_1 + m_2 + m_3 + A' \left(\frac{\langle \hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2 \rangle}{m_1 m_2} + \frac{\langle \hat{s}_1 \cdot \hat{s}_3 \rangle}{m_1 m_3} + \frac{\langle \hat{s}_2 \cdot \hat{s}_3 \rangle}{m_2 m_3} \right)$	Effektive Massen:	$m_d = m_u = 0.365 \text{ GeV}$ $m_s = 0.540 \text{ GeV}$
		Spin-Spin WW-Stärke	$A' = 0.026 \text{ GeV}^3$

Das gemischt antisymmetrische qqq Oktett und das (verbotene) total antisymmetrische qqq Singulett

- Wie auf der vorletzten Seite beschrieben: Bei der Kopplung $\bar{3}_A \otimes 3$ (9 Zustände) entsteht ein sechseckiges (gemischt antisymmetrisches) Oktett 8_{MA} und ein weiteres Singulett. Somit: $\bar{3}_A \otimes 3 = 8_{MA} \oplus 1_A$



$\phi_{flavor} \chi_{spin}$ muss symmetrisch sein (für $L = 0$) \Rightarrow

Ein Baryonen-Singulett 1_A kann es im Grundzustand $L = 0$ nicht geben, weil es keine antisymmetrische Dreiteilchen-Spinfunktion χ_A gibt.

- Die sechs Eckpunkte des Oktetts 8_{MA} sind direkt ablesbar:

$ \mathbf{8}_1^{MA}\rangle = \frac{ ud\rangle - du\rangle}{\sqrt{2}} d\rangle = \frac{ udd\rangle - dud\rangle}{\sqrt{2}}$	$ \mathbf{8}_2^{MA}\rangle = \frac{ ud\rangle - du\rangle}{\sqrt{2}} u\rangle = \frac{ udu\rangle - duu\rangle}{\sqrt{2}}$	$ \mathbf{8}_3^{MA}\rangle = \frac{ us\rangle - su\rangle}{\sqrt{2}} u\rangle = \frac{ usu\rangle - suu\rangle}{\sqrt{2}}$
$ \mathbf{8}_4^{MA}\rangle = \frac{ us\rangle - su\rangle}{\sqrt{2}} s\rangle = \frac{ uss\rangle - sus\rangle}{\sqrt{2}}$	$ \mathbf{8}_5^{MA}\rangle = \frac{ ds\rangle - sd\rangle}{\sqrt{2}} s\rangle = \frac{ dss\rangle - sds\rangle}{\sqrt{2}}$	$ \mathbf{8}_6^{MA}\rangle = \frac{ ds\rangle - sd\rangle}{\sqrt{2}} d\rangle = \frac{ dsd\rangle - sdd\rangle}{\sqrt{2}}$

- Der erste Punkt in der Mitte des Oktetts 8_{MA} ist über Leiteroperatoren erreichbar. Da die Symmetrie des Isospins I_3 am besten erfüllt ist, wählen wir $|\mathbf{8}_7\rangle = \hat{T}_+ |\mathbf{8}_6\rangle = \hat{T}_+ \frac{|udd\rangle - |dud\rangle}{\sqrt{2}} = \hat{T}_+^{(1)} \frac{|dsd\rangle - |sdd\rangle}{\sqrt{2}} + \hat{T}_+^{(2)} \frac{|dsd\rangle - |sdd\rangle}{\sqrt{2}} + \hat{T}_+^{(3)} \frac{|dsd\rangle - |sdd\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|usd\rangle - 0}{\sqrt{2}} + \frac{0 - |sdu\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|dsu\rangle - |sdu\rangle}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$$|\mathbf{8}_7^{MA}\rangle = \frac{|dsu\rangle - |sdu\rangle + |usd\rangle - |sud\rangle}{2}$$

- Für den zweiten Punkt in der Mitte des Oktetts 8_{MA} wählen wir folgenden Ansatz:

$$|\mathbf{8}_8^{MA}\rangle = \tilde{\alpha} \hat{U}_+ |\mathbf{8}_4^{MA}\rangle + \tilde{\beta} \hat{V}_+ |\mathbf{8}_5^{MA}\rangle = \tilde{\alpha} \hat{U}_+ \frac{|uss\rangle - |sus\rangle}{\sqrt{2}} + \tilde{\beta} \hat{V}_+ \frac{|dss\rangle - |sds\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|\mathbf{8}_8^{MA}\rangle = \alpha (-|dus\rangle + |uds\rangle + |usd\rangle - |sud\rangle) + \beta (-|uds\rangle + |dus\rangle + |dsu\rangle - |sdu\rangle) \dots (1) \text{ Orthogonalität: } \langle \mathbf{8}_7^{MA} | \mathbf{8}_8^{MA} \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} (\langle dsu | - \langle sdu | + \langle usd | - \langle sud |) (-\alpha |dus\rangle + \alpha |uds\rangle + \alpha |usd\rangle - \alpha |sud\rangle - \beta |uds\rangle + \beta |dus\rangle + \beta |dsu\rangle - \beta |sdu\rangle) = 0$$

$$\frac{1}{2} \beta (\langle dsu | dsu\rangle + \langle sdu | sdu\rangle) + \frac{1}{2} \alpha (\langle usd | usd\rangle + \langle sud | sud\rangle) = 0 \Rightarrow \beta + \alpha = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha \quad (1)$$

$$|\mathbf{8}_8^{MA}\rangle = \alpha (2|uds\rangle - 2|dus\rangle + |usd\rangle - |sud\rangle + |dsu\rangle - |sdu\rangle) \dots (2) \text{ Normierung: } \langle \mathbf{8}_8^{MA} | \mathbf{8}_8^{MA} \rangle = 1 \quad (2)$$

$$\alpha^2 (4 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1) = 12\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{12}} \Rightarrow |\mathbf{8}_8^{MA}\rangle = \frac{2(|uds\rangle - |dus\rangle) + |usd\rangle - |sud\rangle + |dsu\rangle - |sdu\rangle}{\sqrt{12}}$$

- Für das Singulett 1 wählen wir folgenden Ansatz: Für jeden Eckpunkt des Zweiquarkzustands $\bar{3}_A$ gibt es einen Zustand des dritten Quarks des Triplets 3 , der wieder zum Mittelpunkt führt. Wir wählen als Ansatz eine Superposition dieser drei Kombinationen, und berücksichtigen die Orthogonalität zu $|\mathbf{8}_7^{MA}\rangle$ und $|\mathbf{8}_8^{MA}\rangle$, sowie die Normierungsbedingung:

$$\text{Ansatz: } |1^A\rangle = \alpha \frac{|ud\rangle - |du\rangle}{\sqrt{2}} |s\rangle + \beta \frac{|ds\rangle - |sd\rangle}{\sqrt{2}} |u\rangle + \gamma \frac{|us\rangle - |su\rangle}{\sqrt{2}} |d\rangle = \alpha \frac{|uds\rangle - |dus\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{|dsu\rangle - |sdu\rangle}{\sqrt{2}} + \gamma \frac{|usd\rangle - |sud\rangle}{\sqrt{2}} \dots (3)$$

$$\text{Orthogonalität 1: } \langle \mathbf{8}_7^{MA} | 1^A \rangle = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (\langle dsu | - \langle sdu | + \langle usd | - \langle sud |) (\alpha \frac{|uds\rangle - |dus\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{|dsu\rangle - |sdu\rangle}{\sqrt{2}} + \gamma \frac{|usd\rangle - |sud\rangle}{\sqrt{2}}) = 0$$

$$\frac{1}{2} \beta (\langle dsu | dsu\rangle + \langle sdu | sdu\rangle) + \frac{1}{2} \gamma (\langle usd | usd\rangle + \langle sud | sud\rangle) = 0 \Rightarrow \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -\beta \quad (3)$$

$$|1\rangle = \alpha \frac{|uds\rangle - |dus\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{|dsu\rangle - |sdu\rangle}{\sqrt{2}} - \beta \frac{|usd\rangle - |sud\rangle}{\sqrt{2}} = \alpha \frac{|uds\rangle - |dus\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{|dsu\rangle - |sdu\rangle - |usd\rangle + |sud\rangle}{\sqrt{2}} \dots (4)$$

$$\text{Orthogonalität 2: } \langle \mathbf{8}_8^{MA} | 1^A \rangle = 0 \Rightarrow \frac{2\langle uds | - 2\langle dus | + \langle usd | - \langle sud | + \langle dsu | - \langle sdu |}{2} (\alpha \frac{|uds\rangle - |dus\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{|dsu\rangle - |sdu\rangle - |usd\rangle + |sud\rangle}{\sqrt{2}}) = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{12}} \alpha (\langle uds | uds\rangle + \langle dus | dus\rangle) - \frac{1}{\sqrt{12}} \beta (\langle usd | usd\rangle + \langle sud | sud\rangle) - \frac{1}{\sqrt{12}} \beta (\langle dsu | dsu\rangle + \langle sdu | sdu\rangle) - \frac{1}{\sqrt{12}} \beta (\langle usd | dsu\rangle + \langle sud | sdu\rangle) = 0$$

$$4\alpha - 4\beta = 0 \Rightarrow \beta = \alpha \quad (4) \Rightarrow |1^A\rangle = \alpha \frac{|uds\rangle - |dus\rangle + |dsu\rangle - |sdu\rangle - |usd\rangle + |sud\rangle}{\sqrt{2}} \dots (5) \text{ Normierung: } \langle 1 | 1 \rangle = 1 \Rightarrow \frac{\alpha^2}{2} (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 1$$

$$3\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow |1^A\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|uds\rangle - |dus\rangle + |dsu\rangle - |sdu\rangle - |usd\rangle + |sud\rangle)$$

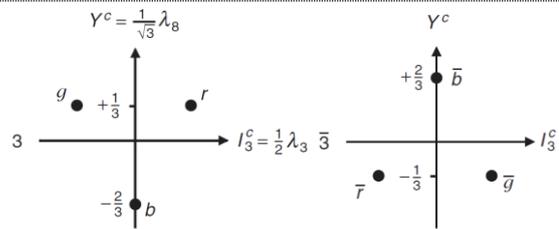
Farbe und QCD

- Anstelle von zwei Ladungstypen wie im Elektromagnetismus hat die QCD drei fundamentale Ladungen für die starke Kernkraft, die als die Farben rot, grün und blau (r, g, b) bekannt sind, sowie drei entgegengesetzte Farbladungen anti-rot, anti-grün und anti-blau ($\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$).
- Ein freies Teilchen kann keine Nettoladung irgendeiner Art haben; nur "farblose" Zustände sind für freie (beobachtbare) Teilchen erlaubt.
- Eine Farbe plus ihrer Antifarbe ist farblos; zusätzlich sind alle drei eindeutigen Farben r, g, b (oder Antifarben $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$) zusammengenommen farblos
- Während die QED-Wechselwirkung durch ein masseloses Photon vermittelt wird, das dem einzelnen Generator der lokalen U(1)-Eichsymmetrie entspricht, wird die QCD-Wechselwirkung durch acht masselose Gluonen vermittelt, die den acht Generatoren der lokalen SU(3)-Eichsymmetrie entsprechen.
- Jedes Quark enthält eine Netto-Farbladung von einer Farbe (r, g, b); jedem Antiquark ist eine Anti-Farbe ($\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$) zugeordnet
- Das einzige andere Standardmodell-Teilchen mit einer Farbe ist das Gluon: Quarks tauschen Gluonen aus und bilden so gebundene Zustände.
- Nur Teilchen mit einer Farbladung ungleich Null koppeln an Gluonen. Aus diesem Grund spüren die Leptonen die starke Kraft nicht.
- Die Quarks, die die Farbladung tragen, existieren in drei orthogonalen Farbzuständen.
- Im Gegensatz zur approximativen SU(3) uds -Flavor-Symmetrie ist die SU(3) rgb -Farbsymmetrie exakt. Folglich ist die Stärke der QCD-Wechselwirkung unabhängig von der Farbladung.
- Während der Elektromagnetismus die elektrische Ladung der Teilchen, die sich gegenseitig anziehen oder abstoßen, nicht ändert, ändern sich die Farben (oder Antifarben) der Quarks (oder Antiquarks) jedes Mal, wenn die starke Kernkraft auftritt.

- Die 3 Farbzustände können mit drei Farbwellenfunktionen beschrieben werden:

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

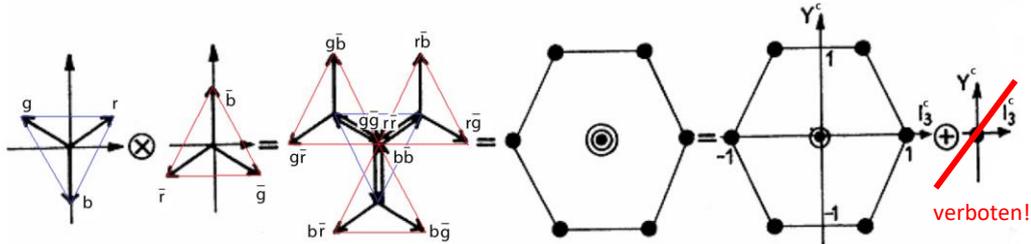
- Analog zum SU(3) flavor können die Farbzustände von Quarks und Antiquarks mit zwei Quantenzahlen dargestellt werden: Dem **Farbisospin** I_3^c und der **Farbhyperladung** Y^c



Feynman Regeln für QCD	Gluon Propagator	$-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \delta^{ab} \dots$	δ^{ab} gewährleistet, dass das Gluon vom Typ a, das am Vertex μ emittiert wird, das gleiche ist wie das an ν absorbierte.	QCD vertex: $-\frac{1}{2} ig_s \lambda_j^a \gamma^\mu$ $a = 1 \dots 8$ $j i = r, g, b$	
------------------------	------------------	--	--	--	--

Gluonen: Koppeln von Farbe und Antifarbe zu einem $c\bar{c}$ - Oktett (und einem verbotenen $c\bar{c}$ - Singulett)

- Durch die Kopplung eines Farb-Tripletts $\mathbf{3}$ mit einem Antifarbe-Triplett $\bar{\mathbf{3}}$, können theoretisch insgesamt $3 \otimes \bar{3} = 9$ Farb-Antifarbe-Zustände (d.h. Gluonen) erzeugt werden. Diese 9 Zustände zerfallen in ein Oktett und ein Singulett: $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$, wie unten hergeleitet wird.
- Der Singulett-Zustand ist allerdings für Gluonen verboten, da ein einzelnes Gluon (das nicht im freien Zustand existiert) nicht farblos sein darf! Daher gibt es nur 8 Gluonen.
- Grafische Herleitung: Die Vertices des Farb-Tripletts $\mathbf{3}$ sind die Mittelpunkte der drei gekoppelten Anti-Tripletts $\bar{\mathbf{3}}$. Das erzeugt ein Sechseck mit sechs einfach besetzten Eckpunkten und einem dreifach besetzten Mittelpunkt.



- In einem SU(3) Multipllett ist jeder Punkt der äußeren Schale einfach besetzt, und jeder Punkt der nächst innere Schale (wenn die äußere Schale kein Dreieck war) zweifach besetzt. Die äußere Schale ist hier ein Sechseck, die nächst innere Schale ist der Mittelpunkt, der also nur zweifach besetzt sein sollte (aber hier dreifach besetzt ist). Daher zerfällt das Sechseck mit dem dreifach besetzten Mittelpunkt in ein Sechseck mit zweifach besetzten Mittelpunkt (ein Oktett) und ein weiteres Singulett (der zusätzlich besetzte Punkt in der Mitte).
- Die sechs Eckzustände $\xi_8(I^c, I_3^c, Y^c)$ des Oktetts sind einfach besetzt (Farb-Isospin $I^c = (I_3^c)_{max} = 1$):

$$G_8 \left(1, -\frac{1}{2}, +1\right) = |g\bar{b}\rangle, G_8 \left(1, +\frac{1}{2}, +1\right) = |r\bar{b}\rangle, G_8(1, +1, 0) = |r\bar{g}\rangle, G_8 \left(1, +\frac{1}{2}, -1\right) = |b\bar{g}\rangle, G_8 \left(1, -\frac{1}{2}, -1\right) = |b\bar{r}\rangle, G_8 \left(1, -\frac{1}{2}, 0\right) = |g\bar{r}\rangle$$

- The erste Zustand in der Mitte $G_8^{C1}(1, 0, 0)$ kann mit Leiteroperatoren erreicht werden.

$$\text{Wir wählen } G_8^{C1}(0, 0, 1) = \hat{T}_-^{(1)} |r\bar{g}\rangle + \hat{T}_-^{(2)} |r\bar{g}\rangle \xrightarrow{\text{norm}} G_8^{C1}(1, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|r\bar{r}\rangle - |g\bar{g}\rangle) \dots (1)$$

- Der zweite Zustand in der Mitte $G_8^{C2}(1, 0, 0)$ kann mit weiteren Leiteroperatoren hergeleitet werden:

$$\hat{V}_-^{(1)} |r\bar{b}\rangle \xrightarrow{\text{norm}} \frac{1}{\sqrt{2}} (|b\bar{b}\rangle - |r\bar{r}\rangle) \dots (2) \quad \hat{U}_- |g\bar{b}\rangle \xrightarrow{\text{norm}} \frac{1}{\sqrt{2}} (|b\bar{b}\rangle - |g\bar{g}\rangle) \dots (3) \quad \text{Superposition: } G_8^{C2}(0, 0, 1) = \alpha \frac{|b\bar{b}\rangle - |r\bar{r}\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{|b\bar{b}\rangle - |g\bar{g}\rangle}{\sqrt{2}} \dots (4)$$

$$\text{mit: } \langle C1|C2 \rangle = 0 \text{ und } \alpha^2 + \beta^2 = 1 \Rightarrow G_8^{C2}(1, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{6}} (|r\bar{r}\rangle + |g\bar{g}\rangle - 2|b\bar{b}\rangle)$$

Farbfluss für den t-Kanal Prozess $rb \rightarrow br$		Acht Kombinationen: $\frac{r\bar{b}+b\bar{r}}{\sqrt{2}}, \frac{r\bar{g}+g\bar{r}}{\sqrt{2}}, \frac{b\bar{g}+g\bar{b}}{\sqrt{2}}, \frac{r\bar{r}-b\bar{b}}{\sqrt{2}}, -i \frac{r\bar{b}-b\bar{r}}{\sqrt{2}}, -i \frac{r\bar{g}-g\bar{r}}{\sqrt{2}}, -i \frac{b\bar{g}-g\bar{b}}{\sqrt{2}}, \frac{r\bar{r}+b\bar{b}-2g\bar{g}}{\sqrt{2}}$
---	--	---

Exkurs: Eichinvarianz in der klassischen Elektrodynamik

$F^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad A^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}, \quad j^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$	Homogene Maxwell-Gleichung: $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
	Inhomogene Maxwell-Gleichung: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho; \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Lokale Eichtransformation $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi(x^\alpha)$ lässt Feldstärketensor gleich $F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$, alle Maxwell-Gleichungen bleiben erfüllt	

Exkurs: Eichinvarianz in der nichtrelativistischen Quantenmechanik

Schrödingergl. $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{r}, t) \dots (1)$ ist nur invariant bei **globaler** Eichtransformation $\Psi(\vec{r}, t) \rightarrow \Psi'(\vec{r}, t) = e^{i\varphi} \Psi(\vec{r}, t)$.

Nicht invariant bei **lokaler** Eichtrafo $\Psi(\vec{r}, t) \rightarrow \tilde{\Psi}(\vec{r}, t) = e^{i\varphi(\vec{r}, t)} \Psi(\vec{r}, t) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \left(-\hbar \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} + i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right) \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(i\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}, t) + \vec{\nabla}\right)^2 \Psi(\vec{r}, t)$

Wir schreiben die Schrödingergleichung (1) um: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla})^2 \Psi(\vec{r}, t) \dots (2)$

Folgende Gleichung wäre invariant unter **lokaler** Trafo: $\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\Phi(\vec{r}, t)\right) \Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A}(\vec{r}, t))^2 \Psi(\vec{r}, t) \dots (3)$

vorausgesetzt Φ, \vec{A} sind Eichfelder, so dass $\Phi(\vec{r}, t) \rightarrow \tilde{\Phi}(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \chi(\vec{r}, t)}{\partial t}$; $\vec{A}(\vec{r}, t) \rightarrow \tilde{\vec{A}}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \chi(\vec{r}, t)$

Vergleiche (2) und (3) $\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\Phi(\vec{r}, t)$ und $-i\hbar \vec{\nabla} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A}(\vec{r}, t)$

Das können wir schreiben als $i\hbar \begin{pmatrix} \partial_t \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix} \rightarrow i\hbar \begin{pmatrix} \partial_t \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix} - q \begin{pmatrix} \Phi(x^\alpha) \\ \vec{A}(x^\alpha) \end{pmatrix}$ oder kurz als $i\hbar \partial^\mu \rightarrow i\hbar \partial^\mu - qA^\mu \dots$ minimale Substitution

Wann immer eine physikalische Theorie invariant unter einer **globalen** Transformation ist, und wir fordern, dass sie auch unter der äquivalenten **lokalen** Transformation invariant sein soll, müssen neue Felder eingeführt werden. Im Falle der Schrödingergleichung muss das EM-Feld mittels des elektrischen Potentials $\Phi(\vec{r}, t)$ und des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} eingeführt werden.

Nähere Erläuterungen hierzu findest du unter <https://www.goldsilberglitzer.at/Rezepte/Rezept008.pdf>

Exkurs: U(1) Eichinvarianz in der relativistischen Quantenmechanik (QED)

Die Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = m\psi$ ist invariant unter einer **globalen** Phasentransformation $\psi(x^\alpha) \rightarrow \psi'(x^\alpha) = e^{i\varphi} \psi(x^\alpha)$

- Nehmen wir an, wie verlangen Invarianz unter einer **lokalen** Phasentransformation $\psi(x^\alpha) \rightarrow \psi'(x^\alpha) = \tilde{U}(x^\alpha) \psi(x^\alpha) = e^{iq\chi(x^\alpha)} \psi(x^\alpha)$
- Die Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen ist **nicht** invariant unter dieser **lokalen** Transformation: $i\gamma^\mu \partial_\mu (e^{iq\chi(x^\alpha)} \psi) = m e^{iq\chi(x^\alpha)} \psi \Rightarrow i\gamma^\mu (\partial_\mu e^{iq\chi(x^\alpha)} \psi + e^{iq\chi(x^\alpha)} \partial_\mu \psi) = m e^{iq\chi(x^\alpha)} \psi \Rightarrow i\gamma^\mu (e^{iq\chi(x^\alpha)} i q \partial_\mu \chi(x^\alpha) \psi + e^{iq\chi(x^\alpha)} \partial_\mu \psi) = m e^{iq\chi(x^\alpha)} \psi \Rightarrow i\gamma^\mu (\partial_\mu + iq \partial_\mu \chi(x^\alpha)) \psi = m\psi$. Diese Gleichung unterscheidet sich von der Originalgleichung durch den Term $-q\partial_\mu \chi(x^\alpha)$
- Im Falle der Dirac-Gleichung muss das EM-Feld mittels des Viererpotentials $A^\mu(x^\alpha) = (\phi(x^\alpha), \vec{A}(x^\alpha))^T$ eingeführt werden
- Die Physik des EM-feldes ist invariant unter einer **lokalen** Eichtransformation $A_\mu(x^\alpha) \rightarrow A'_\mu(x^\alpha) = A_\mu(x^\alpha) - \partial_\mu \chi(x^\alpha)$ mit $A_\mu(x^\alpha) = (\phi(x^\alpha), -\vec{A}(x^\alpha))$ und $\partial_\mu = (\partial_0, \vec{\nabla})$.
- Wir fordern wieder Invarianz unter einer **lokalen** Eichtransformation $A_\mu(x^\alpha) \rightarrow A'_\mu(x^\alpha) = A_\mu(x^\alpha) - \partial_\mu \chi(x^\alpha)$
- Wenn wir Invarianz unter der lokalen Eichtransformation $\psi(x^\alpha) \rightarrow \psi'(x^\alpha) = e^{iq\chi(x^\alpha)} \psi(x^\alpha)$ fordern, können wir das erreichen, indem wir die Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = m\psi$ umschreiben zu $i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu(x^\alpha)) \psi = m\psi$
 D_μ min. Substitution
- Diese geänderte Dirac-Gleichung beschreibt nunmehr kein freies Teilchen mehr, weil es gibt einen **Wechselwirkungs-Term** $-q\gamma^\mu A_\mu(x^\alpha) \psi$.

Exkurs: Klassisches Wirkungsintegral – Euler-Lagrange-Gleichung

Wir betrachten eine **Lagrangefunktion**, die von n verallg. Koordinaten q_i , Geschwindigkeiten \dot{q}_i und der Zeit abhängt: $L = T - V = L(q_i, \dot{q}_i, t)$
Die möglichen Wege werden durch einen Parameter α unterschieden: $q_i = q_i(\alpha, t)$

Das **Wirkungsintegral** ist dann: $S(\alpha, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(\alpha, t), \dot{q}_i(\alpha, t), t) dt$. Wir fordern Stationarität des Wirkungsintegrals $\frac{\delta S}{\delta \alpha} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\delta S}{\delta \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) dt = 0 \quad \left| \frac{\delta S}{\delta \alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \delta S; \quad \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \delta q_i; \quad \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \delta \dot{q}_i \Rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0 \right.$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial}{\partial t} \delta q_i \right) dt = 0 \quad \left| \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial}{\partial t} \delta q_i = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right.$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\delta q_i(t_2) - \delta q_i(t_1)) = 0 \quad \left| \delta q_i(t_2) = \delta q_i(t_1) = 0 \right.$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0 \quad \left| \text{kann allgemein nur verschwinden, wenn der Integrand null ist} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad \dots \text{ Euler-Lagrange-BWGL.} \right.$$

Das Wirkungsintegral in der Feldtheorie

Wir betrachten eine **Lagrangedichte**, die von Feldern ϕ und deren Ableitungen $\partial_\mu \phi$ abhängt: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi(x^\alpha), \partial_\mu \Phi(x^\alpha))$ Das **Wirkungsintegral** wird zu einer Funktion der Integrationsgrenzen τ_1, τ_2 und zu einem Funktional der Felder ϕ : $S([\phi], \tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) d^4x$

$$\delta S[\phi] = 0 \Rightarrow \int_{\mathcal{M}} \delta \mathcal{L} d^4x = \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \delta \Phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Phi_i)} \partial_\nu \delta \Phi_i \right) d^4x = 0 \quad \left| \partial_\nu \delta \Phi_i = \delta \partial_\nu \Phi_i \Rightarrow \right.$$

$$\int_{\mathcal{M}} \delta \mathcal{L} d^4x = \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \delta \Phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Phi_i)} \delta (\partial_\nu \Phi_i) \right) d^4x = 0 \quad \left| \text{entspricht} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} \right) dt \right.$$

$$\int_{\mathcal{M}} \delta \mathcal{L} d^4x = \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \delta \Phi_i - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Phi_i)} \delta \Phi_i \right) d^4x + \int_{\mathcal{M}} \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Phi_i)} \delta \Phi_i \right) d^4x = 0 \quad \dots (1) \Rightarrow$$

$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \delta \phi \right) dt}_{\text{entspricht}}$
 $\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta \phi \right) dt}_{\text{entspricht}}$

$$\text{Euler-Lagrange-Bewegungsgleichung (wenn Randterm} = 0): \quad \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \Phi_i)} \right] = 0 \quad \dots (2) \quad \text{entspricht} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 0$$

Variation nach Parametern von kontinuierlichen inneren Symmetrien der Lagrangedichte → Stromdichte

Hat die Lagrangedichte eine kontinuierliche, globale innere Symmetrie, beschrieben mit dem Symmetrieparameter α , dann: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\delta S}{\delta \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \int_G \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} d^4x = \int_G \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \partial_\mu \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) d^4x = \int_G \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) d^4x = 0$$

$$\int_G \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) d^4x + \int_G \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) d^4x = \int_G \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}}_{=0 \text{ (ELGR)}} d^4x + \int_G \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) d^4x = 0$$

$$\int_G \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) d^4x = 0 \quad \left| \text{soll für ein beliebiges vierdimensionales Gebiet verschwinden} \Rightarrow \partial_\mu \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right)}_{j^\mu} \Big|_{\alpha=0} = 0 \Rightarrow \right.$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung } \partial_\mu j^\mu = 0 \text{ mit Noetherstrom } \left[j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right] \text{ (kovariant erhalten)}$$

Exkurs: Diverse Lagrangedichten in der QFT

Klassisches Punktteilchen	Lagrangefunktion: $L = T - V$ mit $T = E_{kin}, V = E_{pot}$	Euler-Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$	Bsp.: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} (m\dot{x}) - \left(-\frac{\partial V}{\partial x} \right) = m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F$
Skalarfelder:	$q_i \rightarrow \phi_i(t, x, y, z)$ $\dot{q}_i \rightarrow \partial_\mu \phi_i$	$L(q_i, \dot{q}_i) \rightarrow \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$ with $L = \int \mathcal{L} d^3x$	Euler-Lagrange $\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0$... (1) mit ϕ_i ... Skalarfeld
Relativistisches Spin 0 Skalarfeld	\mathcal{L} für freies Skalarfeld $\mathcal{L}_S = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$... (2)	$\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} = \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu \phi \right) \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu^\dagger \phi \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial^\mu \phi \right)$ $\frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu \phi \right) = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial^\mu \phi = \partial^\mu \phi \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \partial_\mu \partial^\mu \phi - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial \phi} = 0 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \partial_\mu \partial^\mu \phi - (-m^2 \phi) = 0 \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$... Klein-Gordon-Gleichung für Skalarfeld	
Relativist. (Spin-1/2) Spinor-Feld	\mathcal{L} für Dirac-Gleichung $\mathcal{L}_D = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi$ $= i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi$... (3)	Euler-Lagrange $\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \bar{\Psi}} = 0$... (4)	$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} = 0 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \bar{\Psi}} = 0 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} - (i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi) = 0 \Rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0$... Dirac-Gleichung
Relativist. EM Vektorfeld	\mathcal{L} für EM-Feld $\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$... (5)	$F^{\mu\nu} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$ $A^\mu \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$ $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ Maxwell: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi$	Euler-Lagrange $\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial A_\mu} = 0$... (6)
Herleitung der Maxwell-Gleichungen von \mathcal{L}_{EM}	$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \stackrel{(5)}{\Rightarrow} \mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - j^\mu A_\mu$ $\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} \underbrace{\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu}_{\mu \leftrightarrow \nu} - \frac{1}{4} \partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu + \frac{1}{4} \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu + \frac{1}{4} \partial^\nu A^\mu \partial_\mu A_\nu - j^\mu A_\mu$ $\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} \partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{4} \partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu + \frac{1}{4} \partial^\nu A^\mu \partial_\mu A_\nu + \frac{1}{4} \partial^\nu A^\mu \partial_\mu A_\nu - j^\mu A_\mu \Rightarrow \mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{2} \partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu + \frac{1}{2} \partial^\nu A^\mu \partial_\mu A_\nu - j^\mu A_\mu$... (7) $\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \stackrel{(7)}{=} -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} (\partial^\nu A^\mu) \partial_\nu A_\mu^\dagger - \frac{1}{2} \partial^\nu A^\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} (\partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} (\partial^\nu A^\mu) \partial_\mu A_\nu^\dagger + \frac{1}{2} \partial^\nu A^\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} (\partial_\mu A_\nu)$ $\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} (\partial_\nu A_\mu) \partial^\nu A^\mu - \frac{1}{2} \partial^\nu A^\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} (\partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} (\partial_\nu A_\mu) \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} \partial^\nu A^\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} (\partial_\mu A_\nu)$ $\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{1}{2} \partial^\nu A^\mu - \frac{1}{2} \partial^\nu A^\mu + \frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = -\partial^\nu A^\mu + \partial^\mu A^\nu \stackrel{(6)}{\Rightarrow} \partial_\nu (-\partial^\nu A^\mu + \partial^\mu A^\nu) - \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial A_\mu} = 0 \stackrel{(7)}{\Rightarrow} \partial_\nu (-\partial^\nu A^\mu + \partial^\mu A^\nu) - (-j^\mu) = 0 \Rightarrow j^\mu = \partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) \Rightarrow j^\mu = \partial_\nu F^{\nu\mu} \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$... Maxwellgleichungen		
Massive spin 1 particle	$\mathcal{L}_{Proca} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu$		

Exkurs: Lokale Eichinvarianz führt zu QED Lagrangedichte

Lokale Eich-Trafo	Die Anforderung, dass die Dirac-Gleichung unter einer lokalen U(1)-Phasentransformation invariant sein muss, führt die elektromagnetische Wechselwirkung ein. Die erforderliche Eichsymmetrie wird auf natürliche Weise als die Invarianz der Lagrangedichte unter einer <i>lokalen</i> Eichtransformation ausgedrückt: $\Psi(x^\alpha) \rightarrow \Psi'(x^\alpha) = e^{iq\chi(x^\alpha)} \Psi(x^\alpha)$... (1)
\mathcal{L}_D ist nicht invariant bei lokalen Eich-Trafos	$\mathcal{L}_D = i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi} \Psi$... (2) $\rightarrow \mathcal{L}'_D = i\bar{\Psi}' \gamma^\mu \partial_\mu \Psi' - m\bar{\Psi}' \Psi'$... (1) $\mathcal{L}'_D = ie^{-iq\chi} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu (e^{iq\chi} \Psi) - me^{-iq\chi} \bar{\Psi} e^{iq\chi} \Psi = e^{-iq\chi} \bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu e^{iq\chi} \Psi + e^{iq\chi} \partial_\mu \Psi) - m\bar{\Psi} \Psi$ $\mathcal{L}'_D = ie^{-iq\chi} \bar{\Psi} \gamma^\mu (iq(\partial_\mu \chi) e^{iq\chi} \Psi + e^{iq\chi} \partial_\mu \Psi) - m\bar{\Psi} \Psi = -e^{-iq\chi} \bar{\Psi} \gamma^\mu q(\partial_\mu \chi) e^{iq\chi} \Psi + ie^{-iq\chi} \bar{\Psi} \gamma^\mu e^{iq\chi} \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi} \Psi$ $\mathcal{L}'_D = i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi} \Psi - q\bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \chi) \Psi \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \mathcal{L}'_D = \mathcal{L}_D - q\bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \chi) \Psi$... (2) ... nicht invariant bei lokaler Phasentrafo
Eichinvariante Lagrangedichte \mathcal{L} für Spin-1/2 Fermion	The Eichinvarianz kann wiederhergestellt werden durch Ersetzung von ∂_μ mit der kovarianten Ableitung D_μ : $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$... (3) mit A_μ als neuem Eichfeld das transformiert als $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi$... (4) $(2)(3) \Rightarrow \mathcal{L}_{inv} = i\bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi - m\bar{\Psi} \Psi \Rightarrow \mathcal{L}_{inv} = i\bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) \Psi - m\bar{\Psi} \Psi = i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - q\bar{\Psi} \gamma^\mu A_\mu \Psi - m\bar{\Psi} \Psi \Rightarrow$ $\mathcal{L}_{inv} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi - q\bar{\Psi} \gamma^\mu A_\mu \Psi$... (5) $\Rightarrow \mathcal{L}_{inv} = \mathcal{L}_D - q\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu$... (6) Wechselwirkung Fermion mit Photon
\mathcal{L}_{inv} ist invariant bei Eichtransformat.	$\mathcal{L}'_{inv} = \mathcal{L}'_D - q\bar{\Psi}' \gamma^\mu A'_\mu \Psi' \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \mathcal{L}'_{inv} = \mathcal{L}_D - q\bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \chi) \Psi - q\bar{\Psi}' \gamma^\mu A'_\mu \Psi' \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$ $\mathcal{L}'_{inv} = \mathcal{L}_D - q\bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \chi) \Psi - qe^{-iq\chi} \bar{\Psi} \gamma^\mu e^{iq\chi} A'_\mu \Psi' \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \mathcal{L}'_{inv} = \mathcal{L}_D - q\bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \chi) \Psi - q\bar{\Psi} \gamma^\mu (A_\mu - \partial_\mu \chi) \Psi$ $\mathcal{L}'_{inv} = \mathcal{L}_D - q\bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \chi) \Psi - q\bar{\Psi} \gamma^\mu A_\mu \Psi + q\bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \chi) \Psi = \mathcal{L}_D - q\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \mathcal{L}'_{inv} = \mathcal{L}_{inv}$
\mathcal{L}_{QED}	Weil auch $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ invariant unter der Transformation $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi$ ist, können wir den gesamten QED Lagrangian, der die Felder für das Elektron (mit $q = -e$), das masselose Photon, und die WW zwischen den beiden beschreibt, anschreiben: $\mathcal{L}_{QED} = \underbrace{i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi}_{\text{kinetic term electron}} - \underbrace{m_e \bar{\Psi} \Psi}_{\text{electron mass term}} + \underbrace{e\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu}_{\text{potential term } e^- \gamma \text{ interaction}} - \underbrace{\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}_{\text{kinetic term photon}}$ mit $j^\mu = -e\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \Rightarrow$ $\mathcal{L}_{QED} = i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m_e \bar{\Psi} \Psi - j^\mu A_\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{EM}$

Eichsymmetrie der QCD, Transformationsverhalten des Gluonfeldes

<p>SU(3)_{Farb} Eichtrafo</p>	<p>Quarks sind Spin-1/2-Teilchen, die eine Farbe tragen. Daher müssen sie mit (vierkomponentigen) Spinorenfeldern $\Psi(x^\alpha)$ beschrieben werden, die zusätzlich noch einen Farbindex c tragen, der drei Werte annehmen kann (r, g, b): $\Psi_c(x^\alpha)$ Jede SU(3)-Transformation $g(x^\alpha)$ kann mit den Generatoren $t_a = \frac{1}{2}\lambda_a$ ($a = 1 \dots 8$) beschrieben werden: $\Psi_c(x^\alpha) \rightarrow \Psi'_c(x^\alpha) = (e^{i\theta(x^\alpha)t_a})_{cc'} \Psi_{c'}(x^\alpha)$ Der Farbindex c wird meist nicht explizit angeschrieben: $\Psi(x^\alpha) \rightarrow \Psi'(x^\alpha) = \underbrace{e^{i\theta(x^\alpha)t_a}}_{\text{wirkt auf } c} \Psi(x^\alpha) = \underbrace{g(x^\alpha)}_{\text{wirkt auf } c} \Psi(x^\alpha) \dots (1)$</p>
<p>Geometrie lokaler Eichsymmetrie</p>	<p>Sei $\Psi_1 = \Psi(x^\alpha)$ und $\Psi_2 = \Psi(x^\alpha + dx^\alpha)$ ein infinitesimal naher Nachbarvektor. Ψ_1 und Ψ_2 erfahren unterschiedliche Eichtransformationen: $\Psi_1 \rightarrow \Psi'_1 = g(x^\alpha) \Psi_1 \dots (2a)$ und $\Psi_2 \rightarrow \Psi'_2 = g(x^\alpha + dx^\alpha) \Psi_2 \dots (2b)$</p>
<p>Inf. Parallelverschiebung</p>	<p>Wir führen die (infinitesimale) Parallelverschiebung von Ψ_1 zu Ψ_2 ein, die durch eine Eichtransformation nicht gestört werden soll: $\Psi_2 = (1 - i\mathcal{A}^\mu(x^\alpha) dx_\mu) \Psi_1$ mit $\mathcal{A}^\mu = \mathcal{A}^\mu_a t_a$ (Matrix \in SU(3))</p>
<p>Transformationsverhalten des Gluonfeldes</p>	<p>Eichtrafo und Parallelverschiebung sollen vertauschen:</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> <p>Zuerst Eichtrafo $\Psi_1 \rightarrow \Psi'_1$ und dann Parallelverschiebung von Ψ'_1 zu Ψ'_2 soll dasselbe ergeben, wie zuerst Parallelverschiebung von Ψ_1 zu Ψ_2, und dann Eichtrafo $\Psi_2 \rightarrow \Psi'_2$.</p> </div> <div style="text-align: center;"> $\begin{array}{ccc} \Psi_1(x) & \xrightarrow{(1 - i\mathcal{A}^\mu dx_\mu)} & \Psi_2(x + dx) \\ \downarrow g(x) & & \downarrow g(x + dx) \\ \Psi'_1(x) & \xrightarrow{(1 - i\mathcal{A}'^\mu dx_\mu)} & \Psi'_2(x + dx) \end{array}$ </div> </div> <p>Daher Ansatz:</p> $(1 - i\mathcal{A}'^\mu(x^\alpha) dx_\mu) g(x^\alpha) \Psi_1 \stackrel{!}{=} g(x^\alpha + dx^\alpha) (1 - i\mathcal{A}^\mu(x^\alpha) dx_\mu) \Psi_1 \stackrel{(2a)}{\implies}$ $(1 - i\mathcal{A}'^\mu(x^\alpha) dx_\mu) \Psi'_1 = g(x^\alpha + dx^\alpha) (1 - i\mathcal{A}^\mu(x^\alpha) dx_\mu) \Psi_1 \Big g(x^\alpha + dx^\alpha) = g(x^\alpha) + \frac{\partial g(x^\alpha)}{\partial x_\mu} dx_\mu$ $(1 - i\mathcal{A}'^\mu(x^\alpha) dx_\mu) \Psi'_1 = \left(g(x^\alpha) + \frac{\partial g(x^\alpha)}{\partial x_\mu} dx_\mu \right) (1 - i\mathcal{A}^\mu(x^\alpha) dx_\mu) \Psi_1$ $(1 - i\mathcal{A}'^\mu(x^\alpha) dx_\mu) \Psi'_1 = \underbrace{g(x^\alpha) \Psi_1}_{\Psi'_1} - i g(x^\alpha) \mathcal{A}^\mu(x^\alpha) dx_\mu \Psi_1 + \frac{\partial g(x^\alpha)}{\partial x_\mu} dx_\mu \Psi_1 + O(dx^2) \Big \Psi_1 = g^{-1}(x^\alpha) \Psi'_1$ $(1 - i\mathcal{A}'^\mu(x^\alpha) dx_\mu) \Psi'_1 = \Psi'_1 - i g(x^\alpha) \mathcal{A}^\mu(x^\alpha) dx_\mu g^{-1}(x^\alpha) \Psi'_1 + \frac{\partial g(x^\alpha)}{\partial x_\mu} dx_\mu g^{-1}(x^\alpha) \Psi'_1$ $(1 - i\mathcal{A}'^\mu(x^\alpha) dx_\mu) \Psi'_1 = \left(1 - i g(x^\alpha) \mathcal{A}^\mu(x^\alpha) dx_\mu g^{-1}(x^\alpha) + \frac{\partial g(x^\alpha)}{\partial x_\mu} dx_\mu g^{-1}(x^\alpha) \right) \Psi'_1$ $-i\mathcal{A}'^\mu(x^\alpha) dx_\mu = -i g(x^\alpha) \mathcal{A}^\mu(x^\alpha) dx_\mu g^{-1}(x^\alpha) + \frac{\partial g(x^\alpha)}{\partial x_\mu} dx_\mu g^{-1}(x^\alpha) \Big : dx_\mu$ $-i\mathcal{A}'^\mu(x^\alpha) = -i g(x^\alpha) \mathcal{A}^\mu(x^\alpha) g^{-1}(x^\alpha) + \frac{\partial g(x^\alpha)}{\partial x_\mu} g^{-1}(x^\alpha) \Big \cdot i$ $\mathcal{A}'^\mu(x^\alpha) = g(x^\alpha) \mathcal{A}^\mu(x^\alpha) g^{-1}(x^\alpha) + i \frac{\partial g(x^\alpha)}{\partial x_\mu} g^{-1}(x^\alpha) \Big \frac{\partial g}{\partial x_\mu} g^{-1} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} (g g^{-1}) - g \frac{\partial g^{-1}}{\partial x_\mu} = -g \partial_\mu g^{-1}$ $\mathcal{A}'^\mu(x^\alpha) = g(x^\alpha) \mathcal{A}^\mu(x^\alpha) g^{-1}(x^\alpha) - i g(x^\alpha) \partial_\mu g^{-1}(x^\alpha)$ $\mathcal{A}'^\mu(x^\alpha) = g(x^\alpha) \mathcal{A}^\mu(x^\alpha) g^{-1}(x^\alpha) - i g(x^\alpha) \partial_\mu g^{-1}(x^\alpha)$ $\mathcal{A}'^\mu(x^\alpha) = g(x^\alpha) (\mathcal{A}^\mu(x^\alpha) - i \partial_\mu) g^{-1}(x^\alpha) \dots (3) \text{ mit } \mathcal{A}^\mu(x^\alpha) = \frac{\bar{g}}{h} A^\mu_a(x^\alpha) t_a$
<p>Nicht abelsch</p>	<p>$[\mathcal{A}^\mu(x^\alpha), \mathcal{A}^\nu(x^\alpha)] = \frac{\bar{g}^2}{h^2} A^\mu_a(x^\alpha) A^\nu_b(x^\alpha) [t_a, t_b] = i \frac{\bar{g}^2}{h^2} A^\mu_a(x^\alpha) A^\nu_b(x^\alpha) f_{abc} t_c$</p>

Gluonischer Feldstärketensor

<p>Parallelverschiebung</p>	<p>Die Parallelverschiebung längs eines Pfades C_x^y von x^μ nach y^μ kann aus infinitesimalen Verschiebungen zusammengesetzt werden, wobei auf die Reihenfolge zu achten ist. $C_x^y = \{s^\mu(t) 0 \leq t \leq 1, s^\mu(0) = x^\mu, s^\mu(1) = y^\mu\}$</p> $U_x^y = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{n=N}^1 \left(1 - i\mathcal{A}^\mu \left(s^\alpha \left(\frac{n-1}{N} \right) \right) \left(s_\mu \left(\frac{n}{N} \right) - s_\mu \left(\frac{n-1}{N} \right) \right) \right) = \mathcal{P} e^{-i \int_{C_x^y} \mathcal{A}^\mu(x^\alpha) d^4 x_\mu} \dots (1)$ <p>Entwicklung von (1) bis $O(dx^2)$ ergibt: $U_x^{x+dx} = 1 - i\mathcal{A}^\mu(x^\alpha) dx_\mu - \frac{i}{2} \partial^\nu \mathcal{A}^\mu(x^\alpha) dx_\mu dx_\nu - \frac{1}{2} (\mathcal{A}^\mu(x^\alpha) dx_\mu)^2 \dots (2a)$ Wegen Unitarität $U^{-1} = U^\dagger$ ergibt sich: $U_x^{x+dx} = 1 + i\mathcal{A}^\mu(x^\alpha) dx_\mu + \frac{i}{2} \partial^\nu \mathcal{A}^\mu(x^\alpha) dx_\mu dx_\nu - \frac{1}{2} (\mathcal{A}^\mu(x^\alpha) dx_\mu)^2 \dots (2b)$</p>
<p>Gluonischer Feldstärketensor durch Stokes</p>	<p>Kurvenintegral über (infinitesimale) geschlossene Fläche C_F = Fluss durch (infinitesimale) Fläche F</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> </div> <div> $\oint_{C_F} \mathcal{A}^\mu ds^\mu = \int_F (\partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu) dx_\mu dy_\nu = \int_F \mathcal{F}^{\mu\nu} dx_\mu dy_\nu$ $U_x^x = U_{x+dy}^x U_{x+dx+dy}^{x+dy} U_{x+dx}^{x+dx+dy} U_x^{x+dx} \stackrel{(2ab)}{\implies} \dots$ $U_x^x = 1 - i dx_\mu dy_\nu (\partial^\mu \mathcal{A}^\nu(x^\alpha) - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu(x^\alpha) + i[\mathcal{A}^\mu(x^\alpha), \mathcal{A}^\nu(x^\alpha)]) \implies$ <p>Feldstärketensor: $\mathcal{F}^{\mu\nu}(x^\alpha) = \partial^\mu \mathcal{A}^\nu(x^\alpha) - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu(x^\alpha) + i[\mathcal{A}^\mu(x^\alpha), \mathcal{A}^\nu(x^\alpha)]$ mit $\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{\bar{g}}{h} F_a^{\mu\nu} t_a \implies$</p> $F_a^{\mu\nu}(x^\alpha) = \partial^\mu A_a^\nu(x^\alpha) - \partial^\nu A_a^\mu(x^\alpha) - \frac{\bar{g}}{h} f_{abc} A_b^\mu(x^\alpha) A_c^\nu(x^\alpha) \quad a = 1 \dots 8$ <p>Transformationsverhalten: $\mathcal{F}^{\mu\nu} = g(x) \mathcal{F}^{\mu\nu} g^{-1}(x)$</p> </div> </div>

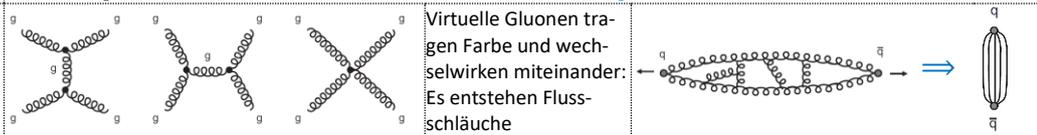
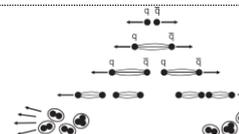
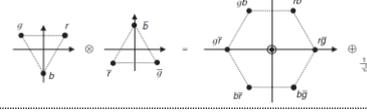
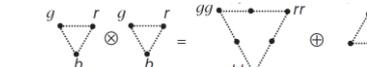
Lagrangedichte der QCD

Eichenteil	$\text{Sp}_F(\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu})$ ist Lorentz-invariant und eichinvariant, weil $\text{Sp}_F(\mathcal{F}'^{\mu\nu}\mathcal{F}'_{\mu\nu}) = \text{Sp}_F(g(x)\mathcal{F}^{\mu\nu}g^{-1}(x)g(x)\mathcal{F}_{\mu\nu}g^{-1}(x)) = \text{Sp}_F(g^{-1}(x)g(x)\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}) = \text{Sp}_F(\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu})$, und $\text{Sp}_F(t_a, t_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$: $\text{Sp}_F(\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}) = \frac{g^2}{h^2}F_{\mu\nu}^a F_b^{\mu\nu} \text{Sp}_F(t_a, t_b) = \frac{g^2}{h^2} \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a F_b^{\mu\nu} \delta_{ab} = \frac{g^2}{h^2} \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$. Wir definieren als Lagrangedichte des Gluonfeldes \mathcal{A}^μ : $\mathcal{L}_{Eich} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\frac{h^2}{g^2} \frac{1}{4} \text{Sp}_F(\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}) \dots (1)$
Diracanteil	Transformationsverhalten der Feldableitungen ist kompliziert: $\partial^\mu \Psi(x) \rightarrow \partial^\mu \Psi'(x) = \partial^\mu (g(x)\Psi(x)) = (\partial^\mu g(x))\Psi(x) + g(x)\partial^\mu \Psi(x)$ Die kovariante Ableitung $D^\mu = \partial^\mu + i\mathcal{A}^\mu$ hat aber dasselbe Transformationsverhalten wie das Feld: $D^\mu \Psi(x) \rightarrow (D^\mu \Psi(x))' = (\partial^\mu + i\mathcal{A}'^\mu)(g(x)\Psi(x)) = \dots = g(x)(D^\mu \Psi(x)) \Rightarrow D^\mu \rightarrow g(x)D^\mu g^{-1}(x)$ Somit: $\mathcal{L}_{Dirac} = \underbrace{i\hbar c \bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi}_{\text{kinetischer Term}} - \underbrace{mc^2 \bar{\Psi}\Psi}_{\text{Massen term}} = c\bar{\Psi}(i\hbar\gamma^\mu D_\mu - mc)\Psi \dots (2)$
Gesamt QCD	$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Eich} = \underbrace{i\hbar c \bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi}_{\text{kinetischer Term}} - \underbrace{mc^2 \bar{\Psi}\Psi}_{\text{Massen term}} - \underbrace{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}}_{\text{WW-Ferme } g\bar{q}q, 3g, 4g}$ $\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\Psi}(i\hbar\gamma_\mu \partial^\mu - mc^2)\Psi - \frac{1}{4}(\partial^\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) - \bar{g}c\bar{\Psi}\gamma_\mu t_a \Psi A_\mu^a + \frac{g}{h}f_{abc}(\partial_\mu A_\nu^a)A_\mu^b A_\nu^c - \frac{1}{4}\frac{g^2}{h^2}f_{abc}A_\mu^b A_\nu^c f_{ade}A_\mu^d A_\nu^e$

Bewegungsgleichungen der QCD

Dirac-gleichung	Euler-Lagrange mit Variation nach $\bar{\Psi}$ ergibt die Diracgleichung: $\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{QCD}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{QCD}}{\partial \bar{\Psi}} = 0 \Rightarrow (i\hbar\gamma_\mu \partial^\mu - \bar{g}\gamma_\mu A_\mu^a t_a - mc)\Psi = 0$ Da das Quarkfeld Ψ einen Diracindex $i \in \{1,2,3,4\}$ und einen (nicht dargestellten) Farbindex $c \in \{r, g, b\}$ besitzt, handelt es sich eigentlich um 12 Gleichungen!
Verallgem. Maxwell-Gl.	Variiert man nach einer der acht Komponenten des Gluonfeldes erhält man verallgemeinerte Maxwellgleichungen $\partial^\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{QCD}}{\partial (\partial^\nu A_\mu^a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{QCD}}{\partial A_\mu^a} = 0 \Rightarrow -c\bar{g}\bar{\Psi}\gamma_\mu t_a \Psi - \frac{g}{h}f_{abc}A_\nu^b F_{\nu\mu}^c - \frac{\partial^\nu F_{\nu\mu}^a}{\partial A_\mu^a} = 0$ Quark-Farbstrom, Gluon-Farbstrom, auch Gluonfeld ist Quelle
Quarkstrom Gluonstrom	Die Quarkstromdichte $j_a^\nu = c\bar{g}\bar{\Psi}\gamma_\mu t_a \Psi$ ist keine Erhaltungsgröße, erhalten ist vielmehr: $J_a^\nu = \underbrace{c\bar{g}\bar{\Psi}\gamma_\mu t_a \Psi}_{\text{Quark-Farbstrom}} - \frac{g}{h}f_{abc}A_\nu^b F_{\nu\mu}^c$ Gluon-Farbstrom

Farbeinschluss

Farbeinschluss-Hypothese	Farbige Objekte sind nur in farblosen Singulett-Zuständen zu finden. Kein Objekt mit einer Farbe ungleich Null kann sich als freies Teilchen ausbreiten. Daher sehen wir niemals freie Quarks. Sie sind nur in gebundenen, farblosen Zuständen zu finden. Gluonen, die farbig sind, sind auch in farblosen Objekten „eingesperrt“. Deshalb können sich Gluonen nicht über makroskopische Entfernungen ausbreiten.
Farblos	Nur wenn $J_3^c = Y^c = 0$, ist ein Zustand farblos. Das ist nur bei Farb-Singulett-Zuständen der Fall.
gg Interaktion dreifach und vierfach Gluonen-Vertices	Virtuelle Gluonen tragen Farbe und wechselwirken miteinander: Es entstehen Flussschläuche 
Hadronische Zustände	Die Farbeinschluss-Hypothese impliziert, dass alle Hadronen (gebundene Quark-Zustände) farblos sind, d.h. einen farblosen, Singulett-Farbzustand haben. Dies schränkt die möglichen Quark-Kombinationen stark ein. Nicht zu verwechseln: (Einzel-)Gluon-Zustände dürfen keine (farblosen) Singulett-Farbzustände sein. Alle freien (beobachtbaren) farbigen Objekte müssen gebundene (farblose) Singulett-Farbzustände sein
Hadronisierung	Bei einem Prozess wie $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ werden zwei Quarks erzeugt, die in entgegengesetzte Richtung auseinanderfliegen. Wenn sie sich trennen, wird das Farbfeld auf einen Flussschlauch beschränkt. Wenn die im Farbfeld gespeicherte Energie ausreicht, bricht der Schlauch in kleinere "Strings" auf, wodurch neue $q\bar{q}$ -Paare entstehen. Dadurch entsteht ein Jet von Hadronen (gebundene Quark-Zustände). 
erlaubter $q\bar{q}$ Mesonen-Zustand	Der einzig mögliche Singulett-Farbzustand für $(q\bar{q})$ Mesonen ist $\xi_c(q\bar{q}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r}\rangle + g\bar{g}\rangle + b\bar{b}\rangle)$ 
verbotener qq Mesonen-Zustand	Es gibt keine Singulett-Farb-Wellenfunktion für (qq) -Kombinationen, daher gibt es keine qq Mesonen. 
erlaubter qqq Baryonen-Zustand	Der einzige total antisymmetrische Singulett-Farbzustand für qqq -Mesonen ist $\xi_c(qqq) = \frac{1}{\sqrt{6}}(rgb\rangle - grb\rangle + gbr\rangle - bgr\rangle - rbg\rangle + brg\rangle)$ $3 \otimes 3 \otimes 3 = (6_S \oplus \bar{3}_A) \otimes 3 = 6_S \otimes 3 \oplus \bar{3}_A \otimes 3 = (10_S \oplus 8_{MS}) \oplus (8_{MA} \oplus 1_A)$
andere Baryonen	Ein anderer möglicher Zustand ist das Antibaryon $(\bar{q}\bar{q}\bar{q})$. Pentaquark Zustände $(qqqq\bar{q})$ wurden 2015 und 2019 vom LHCb im CERN beobachtet. Im Prinzip können auch andere Kombinationen von $(q\bar{q})$ und (qqq) existieren.

Gleitende Kopplungskonstante

QED	Die Kopplungskonstante der QED bei niedrigen Energien ist klein ($\alpha \sim 1/137$). Daher liefern Berechnungen erster Ordnung bereits gute Ergebnisse, und die Störungstheorie funktioniert gut. Es muss jedoch berücksichtigt werden, dass in der QED α nicht konstant ist, sondern bei höheren Energien größer wird ("gleitende Kopplungskonstante").	
QCD	Die Kopplungskonstante der QCD bei niedrigen Energien ist groß ($\alpha_s \sim 1$). Daher sind Berechnungen erster Ordnung nicht ausreichend, und die Störungstheorie funktioniert nicht. Es muss jedoch beachtet werden, dass in der QCD α_s nicht konstant ist, sondern bei höheren Energien kleiner wird ("laufende Kopplungskonstante"), so dass die Störungstheorie im Hochenergiebereich verwendet werden kann.	
Asymptotische Freiheit	Ab $ q > 100 \text{ GeV}$ können Quarks als quasifreie Teilchen behandelt werden. Störungstheorie kann verwendet werden.	
Asymptotische Freiheit	<p>Für starke Stöße oder kleine Abstände geht die von Gluonen vermittelte WW gegen null. Nach Störungstheorie ergibt sich für kleine Abstände ($< 0,1 \text{ fm}$) für die WW zwischen Quarks und Antiquarks ein Coulombpotential (Abb. 1). Eine detaillierte Behandlung zeigt aber, dass die Selbst-WW der Gluonen eine wichtige Rolle spielt (Abb. 2ab). Dies führt in unkorrigierter Rechnung zu divergenten Werten. Konsistente Beschreibung ist nur möglich, wenn man eine Abhängigkeit der Farbinheitsladung \bar{g} von der Stärke der Stöße zwischen den Farbladungen $q^\mu q_\mu = q^2$ einführt: $\bar{g} = \bar{g}(q^2)$ q^2 ist hier die Impulsänderung infolge eines Stoßes. Dies kann am besten mit der starken Feinstrukturkonstante ausgedrückt werden:</p> $\alpha_s(q^2) = \frac{\bar{g}^2(q^2)}{4\pi} = \frac{12\pi}{(33-2n_f)\ln(q^2/\Lambda^2)}$ <p>mit $n_f = 6 \dots$ Zahl der Quark-Flavors. $\Lambda \approx 200 \text{ MeV}$ muss über das Experiment bestimmt werden und ist die einzige Dimensionsbehaftete Größe in der QCD. Für die asymptotische Freiheit ist das Vorzeichen von $33 - 2n_f$ wichtig. QCD: $33 - 2n_f = 33 - 2 \cdot 6 > 0 \dots$ asymptotische Freiheit. Anschauung: In der QED schirmt die Polarisationswolke aus Positronen die nackte Ladung ab; je näher man der zentralen Ladung kommt, umso größer wird die messbare Ladung. In der QCD bewirken Quark / Antiquarkpaare dasselbe, dem wirken aber die Gluonen entgegen, die die zentrale Ladung verstärken. Bei $n_f = 6 < 16$ überwiegt die Wirkung der Gluonen.</p>	
	<p>Abb. 2a: Quark/Antiquark-Schleife</p>	<p>Abb. 2b: Gluon-Schleife</p> <ul style="list-style-type: none"> ○ Photon ● Elektron ● Positron ○ farbnutrales Gluon ● farbnegatives Gluon ● farbpsitives Gluon ● farbnegatives Quark ● farbpsitives Quark

Eigenschaften von Gamma-Matrizen γ^μ

Gamma Matrizen (Dirac Darstellung)	$\gamma^0 \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\gamma^1 \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\beta}\underline{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\gamma^2 \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\beta}\underline{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ <p>Clifford Algebra</p>
	$\gamma^3 \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\beta}\underline{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\gamma^5 \stackrel{\text{def}}{=} i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(\gamma^0)^2 = \underline{\beta}^2 = \mathbb{1}$ $(\gamma^i)^2 = -\mathbb{1}$ $\gamma^{0\dagger} = (\gamma^0)^{-1} = \gamma^0$ $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$ $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}$ $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ $\gamma^0 \gamma^1 = -\gamma^1 \gamma^0$ $\gamma^0 \gamma^2 = -\gamma^2 \gamma^0$ $\gamma^0 \gamma^3 = -\gamma^3 \gamma^0$
Beweis $(\gamma^i)^2 = -\mathbb{1}$	$(\gamma^i)^2 = \underline{\beta}\underline{\alpha}_i \underline{\beta}\underline{\alpha}_i = (\underline{\beta}\underline{\alpha}_i + \underline{\alpha}_i \underline{\beta} - \underline{\alpha}_i \underline{\beta}) \underline{\beta}\underline{\alpha}_i = ([\underline{\beta}, \underline{\alpha}_i]_+ - \underline{\alpha}_i \underline{\beta}) \underline{\beta}\underline{\alpha}_i$ $(\gamma^i)^2 = -\underline{\alpha}_i \underline{\beta}\underline{\beta}\underline{\alpha}_i \mid \underline{\beta}\underline{\beta} = \underline{\beta}^2 = \mathbb{1} \Rightarrow (\gamma^i)^2 = -\underline{\alpha}_i \underline{\alpha}_i \mid \underline{\alpha}_i \underline{\alpha}_i = \mathbb{1} \Rightarrow (\gamma^i)^2 = -\mathbb{1}$		
Bew. γ^i anti hermitesch	$(\gamma^i)^\dagger = (\underline{\beta}\underline{\alpha}_i)^\dagger = \underline{\alpha}_i^\dagger \underline{\beta}^\dagger = \underline{\alpha}_i \underline{\beta} = \underline{\alpha}_i \underline{\beta} + \underline{\beta}\underline{\alpha}_i - \underline{\beta}\underline{\alpha}_i = [\underline{\alpha}_i, \underline{\beta}]_+ - \underline{\beta}\underline{\alpha}_i \mid [\underline{\alpha}_i, \underline{\beta}]_+ = \mathbb{0} \Rightarrow \underline{\alpha}_i \underline{\beta} = -\underline{\beta}\underline{\alpha}_i$ $(\gamma^i)^\dagger = -\underline{\beta}\underline{\alpha}_i = -\gamma^i$		
$\underline{\alpha}_i^2, \underline{\beta}^2$	$\underline{\alpha}_i^2 = \underline{\beta}^2 = \mathbb{1} \Rightarrow \text{Eigenvalues} = \pm 1 \mid (\gamma^i)^2 = -\mathbb{1} \Rightarrow \text{Eigenvalues} = \pm i \mid \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$		
Spurlos	$\underline{\alpha}_i = \mathbb{1}\underline{\alpha}_i = \underline{\beta}\underline{\beta}\underline{\alpha}_i = -\underline{\beta}\underline{\alpha}_i \underline{\beta} \Rightarrow \text{tr}(\underline{\alpha}_i) = \text{tr}(-\underline{\beta}\underline{\alpha}_i \underline{\beta}) = \text{tr}(-\underline{\alpha}_i \underline{\beta}\underline{\beta}) = \text{tr}(-\underline{\alpha}_i) \Rightarrow \text{tr}(\underline{\alpha}_i) = 0$ $\text{tr}(\underline{\beta}) = 0 \mid \text{tr}(\gamma^\mu) = 0$		
Darst. mit Pauli Matr.:	$\underline{\alpha}_i = \begin{pmatrix} \mathbb{0}_2 & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbb{0}_2 \end{pmatrix}, \underline{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbb{0}_2 \\ \mathbb{0}_2 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \gamma^i = \underline{\beta}\underline{\alpha}_i = \begin{pmatrix} \mathbb{0}_2 & \sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbb{0}_2 \end{pmatrix}$		