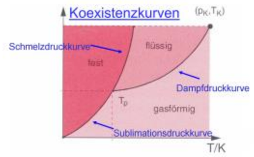
# Statistische Physik I

*03.07.2018*

## Flüssigkeiten und Gase

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ideales Gas, therm. Zustglchg | $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = \frac{Nk_BT}{V} \Longrightarrow pV = Nk_BT = nRT$ | $R = N_A k_B;\ N = nN_a$ |  [1] |
| **Betrachtung auf Teilchenebene** | | | |
| Mittlere kinetische Energie | $\bar{E}_{kin} = \frac{f}{2}k_BT = \frac{m}{2}\overline{v^2}$ | Mittleres Geschw. quadrat: $\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2\, f(v)\, dv = \frac{3k_BT}{m}$ | |
| Kalorische Zustandsgl. | $E_{kin} = \frac{1}{2}k_bT$ (pro FG); $\bar{E} = F + TS = T - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = \frac{f}{2}Nk_BT$ (N Teilchen) | | Gibbs'sche Phasenregel: $F = 2 + K - P$ |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Reale Gase (Van-der-Waals-Gleichung)** | Ehrenfest: | Sprung in n-ter Abl. des Ordnungsparameters (z.B Dichte): Phasenüberg. n-ter Ordnung | | | | | | | |
| $\left(p + \frac{N^2a}{V^2}\right)(V - Nb) = Nk_BT$ | $a\ldots Stoffkonstante$<br>$b = 4N_AV_a = 4N_A\frac{4\pi}{3}r_a^3$ | Krit. Temp.: | $T_k = \frac{8a}{27Rb}$ | Krit. Druck | $p_k = \frac{a}{27b^2}$ | Krit. Vol. | $V_k = 3b$ | $\frac{p_kV_k}{RT_k} = \frac{3}{8}$ | Oberh. der kritischen Temp. kann Gas nicht verflüs werden |
| Kalorische Zustandsgleichung: | $E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{f}{2}RT - \frac{a}{V}$ | Molare Schmelzw. | $\Lambda_{schm} = T\frac{dp}{dT}(V_{fl} - V_{fest})$ | Boyle Temp. | $T_b = \frac{a}{bR}$ | Bei $T_b$ verh. sich Gas annähernd ideal | | | |

## Thermodynamik

[1] Abb. aus: Wolfgang Demtröder (2105): Experimentalphysik 1. Mechanik und Wärme. 7. Auflage. Springer, 2015S. 215.

| | |
|---|---|
| 0. Haupts. | • Wenn A und B im therm. Gleichgewicht und B und C im Gleichgewicht, dann ist auch A mit C im thermischen Gleichgewicht. |
| 1. Hauptsatz | • Jedes System besitzt eine innere Energie E (extensive Zustandsgröße). Diese kann sich nur über den Transport von mechanischer Arbeit W und Wärme Q über die Systemgrenzen ändern.<br>• Die innere Energie E eines isolierten Systems ist erhalten<br>• Die innere Energie eines Systems ändert sich genau in dem Maß, in dem Energie zugeführt oder entzogen wird. |
| 2. Hauptsatz | • Einem makroskopischen System im Gleichgewicht kann eine Entropie S zugeordnet werden, für die gilt:<br>○ S ist eine extensive Zustandsfunktion.<br>○ Bei reversibler Transformation ($\oint dS = 0$) gilt: $dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T}$ (mit $1/T$ als integrierenden Faktor)<br>• Die Entropie eines isolierten Systems kann nie abnehmen. Jeder Prozess läuft so lange ab, bis die Entropie maximal wird.<br>• Es gibt keine Zustandsänderung, deren einziges Ergebnis die Übertragung von Wärme von einem Körper niederer auf einen Körper höherer Temperatur ist.<br>• Es gibt keine Wärmekraftmaschine, die bei gegebenen mittleren Temperaturen der Wärmezufuhr und Wärmeabfuhr einen höheren Wirkungsgrad hat als den aus diesen Temperaturen gebildeten Carnot-Wirkungsgrad. |
| 3. Haupts. | • Nernst: Es ist nicht möglich, ein System bis zum absoluten Nullpunkt abzukühlen. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Fundamentalgleichung 1.HS | $dE = \delta Q + \delta W$<br>$dE = TdS - p\,dV + \mu\,dN$ | $\delta$: unvollst. Diff. | $dE$ … Zunahme innere Energie<br>$\delta Q$ … zugeführte Wärme<br>$\delta W$ … zugeführte Arbeit | $E$… Zustandsgröße<br>$Q$… keine Zustandsgröße<br>$W$… keine Zustandsgröße | Zugeführte Wärme ⇒ Erhöhung Enthalpie H=U+pV |
| Isochor V=const. | $\delta W = 0 \Rightarrow dE = \delta Q$<br>$(dE)_V = \delta Q = nc_v\,dT$ | | $c_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{f}{2}N_Ak_B = \frac{f}{2}R\ldots spez.\ Molwärme\vert_V$ | $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$ | Zugeführte Wärme ⇒ Erhöhung von U≙Q∝T |
| isobar p=const. | $(dH)_p = \delta Q = dE - \delta W =$<br>$nc_v\,dT + p\,dV = nc_v\,dT + nR\,dT$ | | $c_p = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_p = c_v + R = \frac{f}{2}R + R$ | $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$ | $\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = p(V_2 - V_1) = nR(T_2 - T_1)$<br>Zugeführte Wärme ⇒ Erhöhung der Enthalpie H=E+pV |
| isotherm T=const. | $dE = 0$ (bei i.G. dU∝dT)<br>$\delta Q = -\delta W$ | | $\Delta W = Nk_BT\ln\frac{V_1}{V_2} = Nk_BT\ln\frac{p_2}{p_1}$ | $p_1V_1 = p_2V_2$ | Zugeführte Wärme ⇒ Arbeit |
| adiabat. δQ=0 | $\delta Q = 0$<br>$dE = \delta W$<br>$S = const.$ (wenn reversibel) | | $TV^{\kappa-1} = const.$<br>$pV^\kappa = const.$<br>$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{f+2}{f}$ | $\Delta W_{ad} = \frac{Nk_B}{\kappa - 1}(T_2 - T_1)$ | $\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\kappa-1} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{\kappa}}$ |
| polytrop | $pV^n = const.;\ n = 0\ldots isobar;\ n = 1\ldots isotherm;\ n \to \infty\ldots\ isochor;\ n = \kappa\ldots\ adiabat$ | | | | $\Delta Q = mc_v\frac{n - \kappa}{n - 1}(T_2 - T_1)$ |
| 2. HS | $\eta = \frac{\vert\Delta W\vert}{Q_{zugef}} = 1 - \frac{T_k}{T_w} < 1$ | | $Energie = Exergie + Anergie$<br>$\Delta Q_w = -\Delta W - \Delta Q_k$ | Carnot-Prop.: $\frac{\Delta Q_w}{T_w} + \frac{\Delta Q_k}{T_k} = 0$ | Clausius: $\oint\frac{d'Q}{T} = 0$ |
| 3. HS Entropie | Entropie: Extensives Maß für Energie, die nicht für Arbeit verfügbar ist; für die Unordnung und die Multiplizität eines Systems. | | | | |
| | $dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T};\ \oint dS = 0$ | | $\Delta S = k_B\ln\frac{W_e}{W_a} \geq 0;\ S = k_B\ln\Omega \approx k_B\ln\phi$ | Sackur-Tetrode | $S = Nk_B\left(\ln\left(\frac{1}{n\lambda_T^3}\right) + \frac{5}{2}\right);n = \frac{N}{V};\ \lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi mk_BT}}$ |

| **Fundamentalgl. („FG")** | **Enthalpie H** | **Helmholtz'sche freie Energie F** | **Freie Enthalpie G („Gibbs'sche freie Energie")** |
|---|---|---|---|
| $E \equiv TS - pV + \mu N$<br>$dE = \delta Q + \delta W$<br>$dE = TdS - p\,dV + \mu\,dN$ | $H \equiv E + pV \xRightarrow{abl.,FG\ einsetz.}$<br>$dH = T\,dS + V\,dp$<br>dp=0: H=Energie, um E um dE zu erhöhen, wenn ein Teil der Energie für p dV verw. wird. | $F \equiv E - TS \xRightarrow{abl.,FG\ einsetz.}$<br>$dF = -S\,dT - p\,dV$<br>$F = -k_BT\ln(Z_k)$<br>Thermod. Potential: $dF \leq 0$ | $G \equiv H - TS$<br>$G \equiv E + pV - TS \xRightarrow{abl.,FG\ einsetz.}$<br>$dG = -S\,dT + V\,dp$<br>Thermod. Potential: $dG \leq 0$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Extensive Variable: | verhalten sich additiv mit der Größe des Systems, z.B. $V, S, N, M$ und alle thermodynam. Potentiale $E, S, H, F, G$ | Intensive Variable: | sind größenunabhängig z.B. $p, T, \mu, b$ | Konjugierte Variable: | $V \leftrightarrow p;\ S \leftrightarrow T;$<br>$N \leftrightarrow \mu;\ M \leftrightarrow B$ |
| Gleichgewichtsbedingung: | GLG bei Gleichheit der intensiven Variablen: mechanisch: $p_1 = p_2$, thermisch: $T_1 = T_2$, chemisch: $\mu_1 = \mu_2$. | | | | |

- Isoliertes System: Natürliche Variablen $E, V, N$. Potential: $E(S, V, N)$ oder $S(E, V, N)$
- Geschlossenes System mit Energietausch, ohne Volumenvariation und Teilchentausch: Natürliche Variablen $T, V, N$. Potential: $F(T, V, N)$
- Geschlossenes System mit Volumenvariation, ohne Teilchentausch: Natürliche Variablen $S, p, N$. Potential: $H(S, p, N)$
- Geschlossenes System mit Energietausch und Volumenvariation, ohne Teilchentausch: Natürliche Variablen $T, p, N$. Potential: $G(T, p, N)$
- Offenes System mit Austausch von Energie und Teilchen. Natürliche Variablen $T, V, \mu$. Potential: großkanonisches Potential $J(T, V, \mu)$

| | |
|---|---|
| Reversibel: | Prozess kann ohne Änderung von System oder Umgebung umgekehrt werden. Reversibel ⟹ quasi-statisch. |
| Gibbs-Duhem: | $-S\,dT + V\,dp - N\,d\mu = 0$ … Es gibt kein Potential mit ausschließlich intensiven Variablen (keine Info über Systemgröße) |

## Maxwell-Diagramm

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S E V<br>H F<br>p G T | Echt viele Fysiker trinken gerne Pils hinterm Schreibtisch | Annahme: N=const.<br>Ecken: nat. Variable<br>Seitenmitt.: Potentiale | Bsp. Mitte-Ecke-Ecke: | $\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = -p$<br>$\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{V,N} = T$ | Bsp. Ecke-Ecke senkr. | $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,N} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,N}$ | Bsp. Ecke-Ecke waagr | $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,N}$ |

## Response-Funktionen: Zweite Ableitungen thermodynamischer Potentiale bzgl. natürlicher Variablen

| | | | |
|---|---|---|---|
| spez. Wärme isochor | $C_V \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{V,N} \Big\vert dE = TdS \Rightarrow C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N} \Big\vert S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} \Rightarrow C_V = -T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_{V,N}$ | | |
| spez. Wärme isobar | $C_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{p,N} \Big\vert dH = TdS \Rightarrow C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,N} \Big\vert S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p,N} \Rightarrow C_p = -T\left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}\right)_{p,N}$ | | |
| Thermodynam. Stabilität isoth. | $\kappa_T \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,N} \Big\vert V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T,N} \Rightarrow \kappa_p = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right)_{T,N}$ | Thermodynam. Stabilität adiab. | $\kappa_S \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{S,N} \Big\vert V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{S} \Rightarrow \kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\right)_{S}$ |
| Ausdehnungs-koeff. isoboar | $\alpha_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,N} \Big\vert V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T,N} \Rightarrow \alpha_p = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial T \partial p}\right)_{N}$ | Spannungskoeff-izient isochor | $\beta_V \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,N} \Big\vert p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T} \Rightarrow \beta_V = -\frac{1}{p}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V}\right)_{N}$ |

## Phasenraum mit N Teilchen in D Raumdimensionen

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Γ-Raum für $\mathbb{R}^n$: | $\mathrm{Dim}(\Gamma) = 2DN$ | Eingeschl. Vol. | $\phi(E) = \frac{1}{h^{DN}N!}\int_{H\le E} d^{DN}\underline{q}\, d^{DN}\underline{p}$ | In Box: | $\phi(E) = \frac{1}{h^{DN}N!} V_n{}^N \int_{H\le E} d^{DN}\underline{p}$ | N! nur wenn nicht unterscheidbar | |
| Hamilton | $H = T + V$ | Teilchen in Box 1D | $\mathrm{H}(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \mathrm{V}(q)$ mit $\mathrm{V}(q) = \begin{cases} 0 & \vert q\vert \le \frac{L}{2} \\ \infty & \vert q\vert > \frac{L}{2} \end{cases}$ | Harm. Osz. 1D | $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$ | μ-Raum $\mathbb{R}^n$ | $\mathrm{Dim}(\mu) = 2D$ |
| Liouvill'sches Theorem | $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0$ … keine „Quellen" u. „Senken" von Phasenraumpunkten; keine Schnittpunkte von Trajektorien. $\Rightarrow$<br>$V_0 = V_t$ … Erhaltung des Phasenraumvolumens | | | | | | |
| Ergodisch | Energie ist einzige Invariante. | | | | | | |
| Ergoden-hypothese | Mikrokanonisches Ensemble, ergodisch: Alle Mikrozustände gleicher Energie sind gleich wahrscheinlich. $\Rightarrow \bar{A} = \langle A\rangle$<br>Zeitmittelwert einer Observable: $\bar{A} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{A}(\mathrm{q}(t), \mathrm{p}(t))\, dt$; Ensemblemittelwert: $\langle A\rangle = \int_{H\le E} \mathrm{A}\left(\underline{q},\underline{p}\right) \rho\left(\underline{q},\underline{p}\right) d^{DN}\underline{q}\, d^{DN}\underline{p}$ | | | | | | |

## Klassisches mikrokanonisches Ensemble mit N Teilchen in D Raumdimensionen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| E, V, N fix (isoliert) | Zust.sum: | $\Omega = \lim_{\Delta E\to 0} \frac{1}{h^{DN}N!}\int_{E-\Delta E\le H\le E} d^{DN}\underline{q}\, d^{DN}\underline{p} = \int \delta(E-H)\, d^{DN}\underline{q}\, d^{DN}\underline{p} = \frac{\partial}{\partial E}\int \Theta(E-H)\, d^{DN}\underline{q}\, d^{DN}\underline{p} = \frac{\partial}{\partial E}\phi(E)$ | | | |
| Phasenraumdichte: (Wahrsch. d. Besetzung von Zust. gleicher Energie) | $\rho^E_{MK}\left(\underline{p},\underline{q}\right) = \frac{\delta(E-H)}{\Omega}$ | Entropie: | $S = k_B \ln(\Omega) \approx k_B \ln(\Phi)$ | Erw. wert: | $\langle A\rangle_{MK} = \frac{1}{h^{DN}N!}\int A\rho^E_{MK} d^{DN}\underline{q}\, d^{DN}\underline{p}$ |

## Klassisches kanonisches Ensemble mit N Teilchen in D Raumdimensionen

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T, V, N fix (Wärmebad) | Zust.sum: | $Z_K = \int_0^\infty e^{-\beta E}\,\Omega(E)\, dE = \frac{1}{h^{DN}N!}\int e^{-\beta H} \underline{d}^{DN}\underline{q}\, d^{DN}\underline{p}^{\,*)}$ mit $\beta = \frac{1}{k_B T}$ | Ideales Gas: | $Z_K = \frac{V^N}{N!\lambda_T^{3N}}$ mit $\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$ | | | |
| Phasenraumdichte (Wahrsch. d Besetzung von Zust. gleicher Temp.): | $\rho_K\left(\underline{p},\underline{q}\right) = \frac{1}{Z_K} e^{-\beta H}$ | Freie Energ | $F = -k_B T \ln(\mathrm{Z}_K)$ | Entropie: | $S = -k_B\langle\ln(\rho_K)\rangle = -\frac{\partial F}{\partial T}$ | Druck | $p = k_B T \frac{\partial \ln(\mathrm{Z}_K)}{\partial V}$ |
| Wahrscheinlichkeit $\mathrm{w}(E)\, dE$ | **Var 1:** $\mathrm{w}(E) = \frac{1}{Z_K}\Omega(E)\, e^{-\beta E} = \frac{1}{Z_K}\frac{\partial\Phi}{\partial E} e^{-\beta E}$ | | | | | | |
| | **Var 2:** $\mathrm{w}(E) = \frac{1}{h^{DN}N!}\int \rho_K\left(\underline{p},\underline{q}\right)\delta\left(\mathrm{H}\left(\underline{p},\underline{q}\right) - E\right) d^{DN}\underline{q}\, d^{DN}\underline{p} = \frac{1}{\mathrm{Z}_K h^{DN}N!}\int e^{-\beta H}\,\delta\left(\mathrm{H}\left(\underline{p},\underline{q}\right) - E\right) d^{DN}\underline{q}\, d^{DN}\underline{p} \Big\vert \begin{matrix} a^2 = 2m \\ b^2 = \frac{2}{m\omega^2} \end{matrix}$<br>$\mathrm{w}(E) = \frac{1}{\mathrm{Z}_K h^{DN}N!}\int e^{-\beta\sum(p_i^2/a^2 + q_i^2/b^2)}\,\delta\left(\sum\left(\frac{p_i^2}{a^2} + \frac{q_i^2}{b^2}\right) - E\right) d^{DN}\underline{q}\, d^{DN}\underline{p} \Big\vert \begin{matrix} p_i = as_i;\, dp_i = ads_i \\ q_i = bt_i;\, dq_i = bdt_i \end{matrix}$<br>$\mathrm{w}(E) = \frac{a^{DN}b^{DN}}{\mathrm{Z}_K h^{DN}N!}\int e^{-\beta\sum(s_i^2 + t_i^2)}\,\delta(\sum(s_i^2 + t_i^2) - E)\, d^{DN}\underline{s}\, d^{DN}\underline{t} \Big\vert \begin{matrix} \sum(s_i^2 + t_i^2) = r^2 \\ d^{DN}\underline{s}\, d^{DN}\underline{t} = dr\, d^{DN}OF \end{matrix}$<br>$\mathrm{w}(E) = \frac{a^{DN}b^{DN}}{\mathrm{Z}_K h^{DN}N!}\int\int_0^\infty e^{-\beta r^2}\,\delta(r^2 - E)\, dr\, d^{DN}OF \Big\vert NST = \mathrm{root}(r^2 - E) = \sqrt{E};\, \delta(r^2 - E) = \frac{\delta(r - NST)}{\frac{\partial}{\partial r}(r^2 - E)\big\vert_{r=NST}} = \frac{\delta(r - \sqrt{E})}{2\sqrt{E}}$<br>$\mathrm{w}(E) = \frac{a^{DN}b^{DN}}{2\sqrt{E}\mathrm{Z}_K h^{DN}N!}\int\int_0^\infty e^{-\beta r^2}\,\delta(r - \sqrt{E})\, dr\, d^{DN}OF \Big\vert \int d^{DN}OF = \frac{\partial V_{2DN}}{\partial r} = \frac{\pi^{2DN/2}}{\Gamma(2DN/2+1)} 2DN \cdot r^{2DN-1}$<br>$\mathrm{w}(E) = \frac{a^{DN}b^{DN}}{2\sqrt{E}\mathrm{Z}_K h^{DN}N!}\frac{\pi^{2DN/2}}{\Gamma(2DN/2+1)} 2DN\int_0^\infty e^{-\beta r^2} r^{2DN-1}\,\delta(r - \sqrt{E})\, dr$<br>$\mathrm{w}(E) = \frac{a^{DN}b^{DN}}{2\sqrt{E}\mathrm{Z}_K h^{DN}N!}\frac{\pi^{2DN/2}}{\Gamma(2DN/2+1)} 2DNe^{-\beta E} E^{(2DN-1)/2}$ | | | | | | |
| Mittlere Energie | $\langle E\rangle = \frac{1}{h^{DN}N!}\int \mathrm{H}\left(\underline{p},\underline{q}\right)\rho_K d^{DN}\underline{q}\, d^{DN}\underline{p} = \int_0^\infty E\,\mathrm{w}(E)\, dE = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln(Z_K)$ | Varianz | $\delta E^2 = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2 = -\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\ln(Z_K)$ | | | | |
| Wahrsch. räuml. Aufteilg. 1 Teilch: | $\mathrm{w}(\vec{r})\, d^3x = Ae^{-\beta\,\mathrm{V}(\vec{r})} d^3x$ mit $A$: $\iiint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{w}(\vec{r})\, d^3x = 1$ | oder: $\mathrm{w}(\vec{r}) = \frac{1}{h^{DN}N!}\int \rho_K d^{DN}\underline{q}\, d^{DN-3}\underline{p}$ | | | | | |
| Wahrsch. Auslenkung 1 Teilchen: | $\mathrm{w}(r)\, dr = \left(\iint \mathrm{w}(x^2 + y^2 + z^2)\, r^2 \sin(\vartheta)\, d\varphi\, d\vartheta\right) dr$ | | | | | | |
| Wahrsch. Impuls 1 Teilchen: | $\mathrm{w}(\vec{p})\, d^3p = Ae^{-\beta\,\mathrm{T}(\vec{r})} d^3p$ mit $A$: $\iiint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{w}(\vec{p})\, d^3p = 1$ | oder: $\mathrm{w}(\vec{p}) = \frac{1}{h^{DN}N!}\int \rho_K d^{DN-3}\underline{q}\, d^{DN}\underline{p}$ | | | | | |
| Wahrsch. Geschwindigk. 1 Teilchen | $\frac{\partial p_i}{\partial v_i} = \frac{\partial(mv_i)}{\partial v_i} = m \Rightarrow dp_i = m\, dv_i \Rightarrow d^3p = m^3 d^3v \Rightarrow \mathrm{w}(\vec{v})\, d^3x = \mathrm{w}\left(mv_x, mv_y, mv_z\right) m^3 d^3v$ | | | | | | |
| Viralsatz: | $\langle x_i \frac{\partial H}{\partial x_j}\rangle = k_B T\delta_{ij}$ | Komb. System: | $z_k^{(1+2)} = z_k^{(1)} z_k^{(2)}$ | *) Faktor N! nur wenn Teilchen nicht unterscheidbar | | | |

## Klassisches großkanonisches Ensemble mit N Teilchen in D Raumdimensionen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| T, V, $\mu$ fix; off. System | Zust.sum: | $Z_{GK} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{h^{DN} N!} \int e^{-\beta(H-\mu N)} d^{DN}\underline{q}\, d^{DN}\underline{p} = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_K = e^{z Z_K(N=1)}$ mit $z = e^{\beta\mu}$ („Fugazität") | | | |
| Phasenraumdicht | $\rho_K(\underline{p},\underline{q}) = \frac{1}{Z_{GK}} e^{-\beta(H-\mu N)}$ | Großkanon. Potential: | $J = F - \mu N = -pV = -k_B T \ln(Z_{GK})$ | w d. N Teilch in V | $w(N) = \frac{z^N Z_K}{Z_{GK}}$ |
| Mittl. Teilchen: | $\langle N\rangle = \frac{1}{Z_{GK}} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{h^{DN} N!} \int N e^{-\beta(H-\mu N)} d^{DN}\underline{q}\, d^{DN}\underline{p} = -\frac{\partial J}{\partial \mu} = k_B T \frac{\partial}{\partial \mu} \ln(Z_{GK}) = z Z_K(N=1)$ | | | Ideales Gas: | $Z_{GK} = e^{zV/\lambda_T}$ |
| Mittl. Energ: | $\langle E\rangle = k_B T\left(T\frac{\partial}{\partial T}\ln(Z_{GK}) + \mu \frac{\partial}{\partial \mu}\ln(Z_{GK})\right) = \frac{\partial(\beta J)}{\partial \beta} + \mu\langle N\rangle$ | Entrop. | $S = -k_B\langle\ln(\rho_{GK})\rangle = -\frac{\partial J}{\partial T} = k_B T \frac{\partial}{\partial T}\ln(Z_{GK}) + k_B \ln(Z_{GK})$ | | |

## Quantenstatistik

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Korrespondenzen | statt $(q_i, p) \Longrightarrow \lvert\Psi_i\rangle$; statt $\rho(\underline{q},\underline{p}) \Longrightarrow$ Dichtematrixoperator $\hat\rho$; Observable: statt $\langle A\rangle = \int_\Gamma A\rho\, d^3p\, d^3q \Longrightarrow \langle A\rangle = \mathrm{Tr}(\hat A\hat\rho)$ | | | | | |
| Entropie: | $S = -k_B\,\mathrm{Tr}(\hat\rho\ln(\hat\rho))$ | Energie: | $\langle E\rangle = \mathrm{Tr}(\hat H\hat\rho)$ | Reiner Zustand: | $\hat\rho^2 = \hat\rho;\ \mathrm{Tr}(\hat\rho^2) = 1$ | $\sum_i f(\varepsilon_i) \approx \int_0^\infty \Omega_1 f(\varepsilon)\, d\varepsilon$ |

## Mikrokanonisches Quantenensemble mit N Teilchen in D Raumdimensionen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Mikrokanonische Zustandssumme: | $\Omega = \sum$ mögl. Zust. | Zustandsdichte | $\hat\rho_{MK} = \frac{1}{\Omega}\sum_{E_i=E} \lvert i\rangle\langle i\rvert$ | Entropie: | $S = -k_B\,\mathrm{Tr}(\hat\rho\ln(\hat\rho)) = k_B\ln(\Omega)$ |
| Bsp.: N Teilchen in fixen Positionen mit 2 Einstellungen; sei $i$ die Anz. der „up"-Teilchen („magn. Dipole") | Zust-sum: | $\Omega(E_i) = \binom{N}{i} = \frac{N!}{i!(N-i)!}$ | Wahrsch. f. Zustand i: | $w(E_i) = \frac{\Omega(E_i)}{2^N}$ | |

## Kanonisches Quantenensemble mit N Teilchen in D Raumdimensionen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Kanon Zust.sum | $Z_K = \mathrm{Tr}(e^{-\beta\hat H})$ | Hamilton: | $\hat H = \sum_n \lvert n\rangle E_n\langle n\rvert$ | Zust. Dichte: | $\hat\rho_K = \frac{\sum_n \lvert n\rangle e^{-\beta E_n}\langle n\rvert}{\sum_n e^{-\beta E_n}}$ |
| Bsp: N Teilchen in fixen Positionen mit 2 Einstellungen; sei $i$ die Anz. der „up"-Teilchen („magnetische Dipole") | Zust. summe: | $Z_K = \sum_{j=0}^{N} \Omega(j)\, e^{-\beta E_j}$ | Wahrsch. für Zustand $E_i$: | $w(E_i) = \frac{1}{Z_K}\Omega(E_i)\, e^{-\beta E_i}$ | |
| Harmon. Osz; 2 Teilchen | $Z_K^{Fermi} = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=n_1+1}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n_1+n_2+1)} = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2-n_1=1}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(2n_1+n_2-n_1+1)} = e^{-\beta\hbar\omega}\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-2\beta\hbar\omega n_1}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega k}$ <br> $Z_K^{Bose} = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=n_1}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n_1+n_2+1)} = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2-n_1=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(2n_1+n_2-n_1+1)} = e^{-\beta\hbar\omega}\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-2\beta\hbar\omega n_1}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega k}$ | | | | |

## Großkanonisches Quantenensemble mit N Teilchen in D Raumdimensionen

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Großkan. Zust.summe | | $Z_{GK} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{-\beta(\hat H-\mu N)} = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta(\hat H_{Fock}-\mu\hat N_{Fock})}\right)$ | Zust. Dichte: | $\hat\rho_{GK} = \frac{1}{Z_{GK}} e^{-\beta(\hat H-\mu\hat N)}$ | Hamilton: | $\hat H = \sum_i \varepsilon_i \hat N_i$ |
| Bose-Gas | Besetzung | $\langle n_i\rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}-1} = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon_i}-1}$ | $\langle N\rangle = -\frac{\partial J}{\partial\mu} = \sum_i\langle n_i\rangle = \sum_i \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon_i}-1} = \int_0^\infty (2s+1)\Omega_1 \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon}-1} d\varepsilon = \int_0^\infty \langle N(\varepsilon)\rangle\, d\varepsilon$ | | | |
| | Großkan. Pot.: | $J = k_B T\sum_i \ln(1-ze^{-\beta\varepsilon_i}) = \int_0^\infty (2s+1)\Omega_1 \ln(1-ze^{-\beta\varepsilon})\, d\varepsilon = -k_B T(2s+1)\int_0^\infty \Phi_1 \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ln(1-ze^{-\beta\varepsilon})\, d\varepsilon$ | | | | |
| | Energie | $\langle E\rangle = \sum_i \varepsilon_i\langle n_i\rangle = \sum_i \frac{\varepsilon_i}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon_i-1}} = \int_0^\infty \overset{(2s+1)}{30\Omega_1} \frac{\varepsilon}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon}-1} d\varepsilon$ | | | | |
| Fermi gas | Besetzung | $\langle n_i\rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}+1} = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}+1}$ | $\langle N\rangle = -\frac{\partial J}{\partial\mu} = \sum_i\langle n_i\rangle = \sum_i \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon_i}+1} = \int_0^\infty (2s+1)\Omega_1 \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon}+1} d\varepsilon = \int_0^\infty \langle N(\varepsilon)\rangle\, d\varepsilon$ | | | |
| | Großkan. Pot.: | $J = -k_B T\sum_i \ln(1+ze^{-\beta\varepsilon_i}) = -\int_0^\infty (2s+1)\Omega_1 \ln(1+ze^{-\beta\varepsilon})\, d\varepsilon = k_B T(2s+1)\int_0^\infty \Phi_1 \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ln(1+ze^{-\beta\varepsilon})\, d\varepsilon$ | | | | |
| | Energie | $\langle E\rangle = \sum_i \varepsilon_i\langle n_i\rangle = \sum_i \frac{\varepsilon_i}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon_i}+1} = \int_0^\infty (2s+1)\Omega_1 \frac{\varepsilon}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon}+1} d\varepsilon$ | | | | |
| Einstein-Bose-Kond.: | | $z = e^{\beta\mu}$. Normal: $\mu$<0; z<1. $\mu = k_B T\ln(z) = k_B T\ln\left(\frac{\langle N\rangle}{V}\lambda_T^3\right)$. EBK bei $T < T_C$ oder hohem Druck. <br> EBK: $z \ge 1;\ \mu \ge 0; \frac{\langle N\rangle}{V}\lambda_T^3 \ge 1; \frac{\lambda_T}{\langle L\rangle} \ge 1$. (mit mittl. Weglänge $\langle L\rangle \approx \sqrt[3]{\frac{V}{\langle N\rangle}}$) | | | | |

## Wichtige Integrale und Funktionen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Wichtige Integrale | $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ | $\int f(x)\, e^{-a\, f(x)}\, dx = -\frac{\partial}{\partial a}\int e^{-a\, f(x)}\, dx$ | partiell Integrieren: | $\int f'g = fg - \int f g'$ |
| Integral $\int_{H\le E} dq\underline{dp}$ (Bsp. Harmon. Oszillator) | $\int_{H\le E} d^{DN}\underline{q}\, d^{DN}\underline{p} = \int_{\sum\left(\frac{p_i^2}{2m}+\frac{m\omega^2 q_i^2}{2}\right)\le E} d^{DN}\underline{q}\, d^{DN}\underline{p} = \int_{\sum\left(\frac{p_i^2}{2mE}+\frac{m\omega^2 q_i^2}{2E}\right)\le 1} d^{DN}\underline{q}\, d^{DN}\underline{p}$ $\quad a^2 = 2mE;\ b^2 = \frac{2E}{m\omega^2}$ $=$ <br> $\int_{\sum\left(\frac{p_i^2}{a^2}+\frac{q_i^2}{b^2}\right)\le 1} d^{DN}\underline{q}\, d^{DN}\underline{p}$ $\quad p_i = as_i;\ dp_i = ads_i;\ q_i = bt_i;\ dq_i = bdt_i$ $\quad = a^{DN}b^{DN}\int_{\sum(s_i^2+t_i^2)\le 1} d^{DN}\underline{q}\, d^{DN}\underline{p} = a^{DN}b^{DN}\, V_{DN}(R=1)$ | | | |
| Polylogarithmus | $g_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$ | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Stirling-Formel | $\lim_{N\to\infty}\ln(N!) = N\ln(N) - N$ | D-dim. Kugel, Volumen: | $V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}R^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \overset{wenn\ n\ gerade}{=} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}R^n}{(\frac{n}{2})!}$ | n-dim. Kugel Oberfläche: | $O_n = \frac{\partial V_n}{\partial R} = \frac{n\pi^{n/2}R^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \overset{wenn\ n\ gerade}{=} \frac{n\pi^{n/2}R^{n-1}}{(\frac{n}{2})!}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Gamma-Funktion: Erweiterung d. Fakultät auf ℂ | $\Gamma(\underline{z}) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\, dt;\ \mathrm{Re}(\underline{z}) > 0$ | $z! = \Gamma(z+1)$ | $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ | $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ | $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Delta-Funktion | $\delta(x) \leftrightarrow \delta[\varphi] = \delta_0[\varphi] = \varphi(0) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,\varphi(x)\, dx = \varphi(0)$ | $\delta(x-x_0)\,\delta_{x_0}[\varphi] = \varphi(x_0)$ | | | |
| | $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\, dx = 1$ | $\int_a^b \delta(x)\, dx = \begin{cases} 1, für\ 0 \in [a,b] \\ 0, sonst \end{cases}$ | $\delta(x) = \frac{d}{dx}H(x)$ | $f(x)\,\delta(x-x_0) = f(x_0)\,\delta(x-x_0)$ | $\delta(x) = \delta(-x)$ |
| | $x\,\delta(x) = 0$ | $\delta(ax) = \frac{1}{\lvert a\rvert}\delta(x)$ | $\lvert x\rvert\,\delta(x^2) = \delta(x)$ | $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-NST_i)}{\lvert f'(NST_i)\rvert}$; $NST_i$ ...einfache NST | $\int\delta(x)\, dx = \Theta(x)$ |
| Heaviside-Funktion | $\Theta(x) \leftrightarrow \Theta[\varphi] = \int_0^\infty \varphi(x)\, dx;\ \Theta(x-x_0) = \int_{-\infty}^{x-x_0}\delta(t)\, dt;\ \Theta(x) = \begin{cases} 1\ für\ x > 0 \\ \frac{1}{2}\ für\ x = 0 \\ 0\ sonst \end{cases}$ | $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ | | | |
| Exp.funktion | $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ | Geometr. Reihe: | $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q};\ (0 < \lvert q\rvert < 1)$ | | |
| $\cosh(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2};\ \sinh(z) = \frac{e^z-e^{-z}}{2}; \tanh(z) = \frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}; \coth(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}$ | | | | | |

## Sonstiges

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Vollständig Differential | $\mathrm{d}F(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}\Big\vert_y dx+\frac{\partial F}{\partial y}\Big\vert_x dy$ | Sei $dF=\vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$. Wenn $\int_{C1}\vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\int_{C2}\vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$, dann ist $\vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ vollst. Differential | | |
| | Hinreichende Bedingung: $\nabla\times\vec{f}(\vec{r})=0$ („wirbelfrei") im einfach zusammenhängenden Gebiet G. In $\mathbb{R}^2$: $\frac{\partial f_y}{\partial x}=\frac{\partial f_x}{\partial y}$ | | | |
| Exakte, nicht separable DG erster Ordnung | $p(x,y)+q(x,y)y'=0\rightarrow$<br>$p(x,y)\,dx+q(x,y)\,dy=0$<br>$wobei\ \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}$ | $Prüfe\!:\ \frac{\partial p}{\partial y}\overset{?}{=}\frac{\partial q}{\partial x}$ →wenn nein: finde integrierenden Faktor $a(x,y)\rightarrow$<br>$\phi(x,y)=\int p(x,y)\,dx+C(y)=\int q(x,y)\,dy+D(x)\rightarrow$<br>$\rightarrow bestimme\ C(y)\ und\ D(x)$ | | |
| Ermittlung integrierender Faktor | $\frac{\partial p}{\partial y}=p'(x)\wedge\frac{\partial q}{\partial x}=q'(x),oder$<br>$\frac{\partial p}{\partial y}=p'(y)\wedge\frac{\partial q}{\partial x}=q'(y)$ | $z.B.x\!:Löse\ DG\ \frac{\partial}{\partial y}[p(x,y)a(x)]=\frac{\partial}{\partial x}[q(x,y)a(x)]\ nach\ a$<br>$mittels\ Separation\ der\ Variablen$ | | |
| | $\frac{\partial p}{\partial y}=p'(x,y)\vee\frac{\partial q}{\partial x}=q'(x,y)$<br>$und\ p\ und\ q\ sind\ Polynome.$ | $\frac{\partial}{\partial y}[p(x,y)x^\alpha y^\beta]=\frac{\partial}{\partial x}[q(x,y)x^\alpha y^\beta]\rightarrow$<br>$auflösen\ nach\ \alpha\ und\ \beta\ mit\ KV\ für\ alle\ x^n y^n$ | | |
| Homogene Fkt. | $f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^k f(x,y,z)\Longrightarrow k\,f(x,y,z)=\frac{df}{dx}x+\frac{df}{dy}y+\frac{df}{dz}z$ | $E(\lambda S,\lambda V,\lambda N)=\lambda\,E(S,V,N)\Longrightarrow E=\frac{\partial E}{\partial S}S+\frac{\partial E}{\partial V}V+\frac{\partial E}{\partial N}N$ | | |
| Jacobi-Trafo | $\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}=\det\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)_x\\ \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_x\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_x-\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_y$ | $\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(t,s)}{\partial(y,x)}$<br>$\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}=-\frac{\partial(s,t)}{\partial(y,x)}$ | $\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\left(\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}$ | $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_g=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,g)}=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,g)}$ |
| $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_g$ umwandeln, Variante (1) | $df=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy\ ...(1)\quad g=const.\Longrightarrow dg=0\Longrightarrow\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y dx+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x dy=0\Longrightarrow dy=-\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x^{-1}dx\overset{(1)}{\Longrightarrow}$<br>$df=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x^{-1}dx\,\Big\vert\cdot\frac{1}{dx}\Longrightarrow\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_g=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x^{-1}$ | | | |
| $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_g$ Umwandeln, Variante (2) (Jacobi-Trafo) | $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_g=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,g)}=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,g)}=\det\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x\end{pmatrix}\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,g)}=\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y\right)\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,g)}\Big\vert\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(x,g)}=\frac{\partial(y,x)}{\partial(g,x)}=\left(\frac{\partial y}{\partial g}\right)_x\Longrightarrow$<br>$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_g=\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y\right)\left(\frac{\partial y}{\partial g}\right)_x=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial y}{\partial g}\right)_x=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x^{-1}$ | | | |
| Kreisrelation | $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_g\left(\frac{\partial y}{\partial g}\right)_x\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y=-1$ | Poisson-Klammer: | $\{\rho(\underline{p},\underline{q}),H(\underline{p},\underline{q})\}=\sum_i\frac{\partial\rho}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\sum_i\frac{\partial\rho}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}$ | |
| Legendre-Trafo | Trafo $f(x)\rightarrow g(p(x))$ mit $p=\frac{\partial f}{\partial x}$ $\Longrightarrow$Var.1: $g(p)=f(x(p))-p\,x(p)$ Var.2: $g(p)=p\,x(p)-f(x(p))$<br>Bsp.: $E(S;V,N)\rightarrow F(T;V,N)$ mit $T=\frac{\partial E}{\partial S}\Longrightarrow F(T;V,N)=E(S(T;V,N);V,N)-T\,S(T;V,N)$ | | | |
| D-dim. Harm. Oszillator | $H=\sum_{i=1}^{D}\frac{p_i^2}{2m}+\frac{m\omega^2 q_i^2}{2}$ | Entartung der Besetzung $\langle n_i\rangle$: | $g_i=\binom{D+i-1}{i}=\frac{(D+i-1)!}{i!(D-1)!}$ | |
| Binomial-verteilung | Wahrscheinlichkeit $k$ von $N$ Teilchen im Volumen $V_1$ zu finden wenn $p_1=V_1/V_{ges}$ | $w(k\vert p_1,N)=\binom{N}{k}p^k(1-p_1)^{N-k}$ | Funktion auf Matrixoperator | $f(\hat{A})=\sum_{i=1}^{n}f(\lambda_i)\frac{\lvert n_i\rangle\langle n_i\rvert}{\langle n_i\vert n_i\rangle}$ |
| Eigenwerte | Löse $\det(\hat{A}-\lambda\mathbb{1})=0.$ | Numerische Vielfachheit („Entartung") $n_i$ für $\lambda_i=a$: Anzahl EW mit gleichem Wert a. | | |
| Eigenvektoren | EV $\vec{v}_i$ zu EW $\lambda_i$: $\left[\begin{array}{cccc\vert c}x-\lambda_i & x & x & x & 0\\ x & x-\lambda_i & x & x & 0\\ x & x & x-\lambda_i & x & 0\\ x & x & x & x-\lambda_i & 0\end{array}\right]\xrightarrow{Gauss}\left[\begin{array}{cccc\vert c}1 & 0 & 0 & a & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\Longrightarrow\begin{array}{l}x_1=-at\\ x_2=\ \ 0\\ x_3=\ \ s\\ x_4=\ \ t\end{array}\Longrightarrow\vec{v}_i=s\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-a\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ | | | |