Statistik

03.07.2018

Allgemeines

Merkmalstypen	Qualitative Merkmale: binär (ja/nein); kategorial (Kategorie 1,…,k); ordinal (Rang; z.B. Noten) Quantitative Merkmale: diskret (ganzzahlig, z.B. Zählvorgang), kontinuierlich
Skalentypen	Nominalsala: Zahlenwerte nur „Codes" für sich ausschließende Kategorien (z.B. 1…ledig, 2…verheiratet, 3…geschieden) Ordinalskala: Ordnung der Zahlen ist wesentlich (z.B. Rang einer Mannschaft in einer Meisterschaft) Intervallskala: Ordnung und Differenz sind interpretierbar, aber Nullpunkt willkürlich (z.B. Celsiusskala) Verhältnisskala: Ordnung, Differenz und Größenverhältnisse interpretierbar, es gibt einen Nullpunkt (z.B. Körpergröße)
Ereignisraum	Menge Ω aller möglichen Ausprägungen einer Zufallsvariablen (z.B: Roulette $\Omega = \{1, \dots, 36\}$; Wartezeit $\Omega = \mathbb{R}_+$; …)
Ereignis	Ereignis E ist Teilmenge von Ω. Z.B. „gerade Augenzahl bei Würfelwurf": $G = \{2,4,6\}$. Elementarereignis: einelementige Teilmenge von Ω; unmögliches Ereignis: $G = \emptyset$; sicheres Ereignis: $G = \Omega$.
Ereignisalgebra	Menge aller Ereignisse aus Ω heißt die Ereignisalgebra $\mathfrak{S}(\Omega)$. Mit den Verknüpfungen $A \cup B$ („A oder B"), $A \cap B$ („A und B") und der Negation A' („nicht A"), dem Nullelement $\emptyset$ und dem Einselement Ω ist $\mathfrak{S}(\Omega)$ eine boolsche Algebra.
Wiederholte Experimente	Ist Ω der Ereignisraum eines einmaligen Experiments, dann ist $\underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_{n-mal}$ der Ereignisraum des n-maligen Wiederholung.

Deskriptive Statistik

Häufigkeit	Absolute Häufigkeit $\mathrm{h}(E)$ in Stichprobe $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ist die Anzahl Beobachtungen, in denen E eintritt, d.h. $x_i \in E$. Relative Häufigkeit: $\mathrm{f}(E) = \mathrm{h}(E)/n$. Natürlich gilt: $E = \emptyset \Longrightarrow \mathrm{h}(E) = \mathrm{f}(E) = 0$; $E = \Omega \Longrightarrow \mathrm{h}(E) = \mathrm{f}(E) = 1$
Additionsgesetz	Wenn gilt $E \cap F = \emptyset \Longrightarrow \mathrm{h}(E \cup F) = \mathrm{h}(F) + \mathrm{h}(F)$; $\mathrm{f}(E \cup F) = \mathrm{f}(F) + \mathrm{f}(F)$
Siebformel	Wenn gilt $E \cap F \neq \emptyset \Longrightarrow \mathrm{h}(E \cup F) = \mathrm{h}(F) + \mathrm{h}(F) - \mathrm{h}(E \cap F)$; $\mathrm{f}(E \cup F) = \mathrm{f}(F) + \mathrm{f}(F) - \mathrm{f}(E \cap F)$
Empirische Verteilungsfkt.	Sei die Stichprobe $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ geordnet, dann liefert die empirische Verteilungsfunktion $\mathrm{F}_n(x)$ den Anteil der Daten aus $\vec{x}$, die kleiner oder gleich x sind.
Kernschätzer	Kernschätzer glättet Häufigkeitsverteilung (Histogramm): $\hat{\mathrm{f}}(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$. Z.B. Gaußkern: $K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

Maßzahlen

Lagemaße		Ein Lagemaß gibt den „typischen, zentralen" Wert einer Datenliste an. Eine Funktion $\mathrm{l}(\vec{x})$ ist ein Lagemaß für $\vec{x}$, wenn: $\mathrm{l}(a\vec{x} + b) = a\,\mathrm{l}(\vec{x}) + b$ für $a > 0$, und $\min(\vec{x}) \leq \mathrm{l}(\vec{x}) \leq \max(\vec{x})$ („affin")
	Mittelwert	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \arg_x(\min \sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2)$ Sinnvoll für Intervall- und Verhältnisskala.
	Median	$\tilde{x} = x_{(n/2)} = \arg_x(\min \sum_{i=1}^{n}\lvert x_i - x\rvert)$ teilt geordnete Liste in zwei gleich große Teile (Ordinal-, Intervall- und Verh.skala)
	α-Quantil	$Q_\alpha = x_{(\alpha n)} = x\colon \mathrm{F}_n(x) = \alpha$ Verallgemeinerung des Medians. Teilt geordnete Liste im Verh. $\alpha : 1 - \alpha$. Median ist $Q_{0.5}$.
	LMS	„Least median of Squares": Mittelpunkt des kürzesten Intervalls, das $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ Datenpunkte enthält, unempfindlich.
	HMS	„Half Sample Mode": Wiederhole LMS, bis zwei Datenpunkte übrig sind. HSM ist der Mittelwert dieser zwei Daten.
	Modus	Häufigster Wert der Datenliste. Sinnvoll für diskrete Qualitative Merkmale.
Streuungsmaße		Misst die Abweichung der Daten vom zentralen Wert. Eine Funktion $\sigma(\vec{x})$ ist ein Lagemaß, wenn: $\sigma(\vec{x}) \geq 0$; $\sigma(a\vec{x} + b) = \lvert a\rvert\,\sigma(\vec{x})$ Invariant unter Datenverschiebung (Bleibt identisch bei affiner Transformation).
	Standard-abweichung	$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2}$ Für Intervall- und Verhältnisskala. Varianz: $\mathrm{Var}(\vec{x}) = s^2$
	IQR	$IQR = Q_{0.75} - Q_{0.25}$ („Interquartilsdistanz"); für Ordinal-, Intervall- und Verhältnisskala. Unempfindlich.
	LoS	„Length of Shorth" ist die Länge des kürzesten Intervalls, das das $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ Datenpunkte enthält. O.-,I.- und Verh.skala
Schiefmaße		Misst die Asymmetrie der Daten. Invariant gegen Verschiebung . Eine Funktion $\mathfrak{s}(\vec{x})$ ist ein Schiefmaß für $\vec{x}$, wenn gilt: $\mathfrak{s}(a\vec{x} + b) = \mathrm{sgn}(a)\,\mathfrak{s}(\vec{x})$; $\mathfrak{s}(\vec{x}) = 0$ wenn $\exists b\colon \vec{x} - b = b - \vec{x}$
	Schiefe	$\gamma = \frac{1}{s^3}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3$ $\gamma < 0$ … linksschief; $\gamma > 0$ … rechtsschief; $\gamma = 0$ … symmetr. Für Intervall- und Verhältnisskala.
	Schiefkoeff	$SK = \frac{R-L}{R+L}$ mit $R = Q_{0.75} - Q_{0.5}$; $L = Q_{0.5} - Q_{0.25}$ Für Ordinal-, Intervall- und Verhältnisskala.

Zweidimensionale Merkmale - Korrelation

Binäre Merkmale	Vierfeldertafel, z.B. A … weiblich, A'…männlich B…Raucher, B'…Nichtraucher $\begin{array}{c\|cc\|c} & B & B' & \\ \hline A & \mathrm{f}(A \cap B) & \mathrm{f}(A \cap B') & \mathrm{f}(A) \\ A' & \mathrm{f}(A' \cap B) & \mathrm{f}(A' \cap B') & \mathrm{f}(A') \\ \hline & \mathrm{f}(B) & \mathrm{f}(B') & 1 \end{array}$	Vierfelder-korrelation:	$\rho = \frac{\mathrm{f}(A \cap B) - \mathrm{f}(A)\,\mathrm{f}(B)}{\sqrt{\mathrm{f}(A)\,\mathrm{f}(A')\,\mathrm{f}(B)\,\mathrm{f}(B')}}$; $-1 \leq \rho \leq 1$ $\rho > 0$… positiv gekoppelt $\rho < 0$… negativ gekoppelt
Quantitative Merkmale	Empirischer Korel-lationskoeffizient:	$r_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{xi} z_{yi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \cdot \frac{y_i - \bar{y}}{s_y}$ mit $s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2}$; $s_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - y)^2}$	

Wahrscheinlichkeitsmaße

Wahrscheinlich-keitsmaß	Sei $\Sigma(\Omega)$ eine Ereignisalgebra, A und B Ereignisse in $\Sigma(\Omega)$, und W ein Abbildung von Σ in $\mathbb{R}$. Dann ist W ein Wahrscheinlichkeitsmaß (eine Wahrscheinlichkeitsverteilung), wenn gilt: (1) Positivität: $\mathrm{W}(A) \geq 0, \forall A \in \Sigma$; (2)Additivität: $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mathrm{W}(A \cup B) = \mathrm{W}(A) + \mathrm{W}(B)$; (3) Normierung: $\mathrm{W}(\Omega) = 1$
Wahrsch.raum	Das Paar (Σ, W) heißt Wahrscheinlichkeitsraum.
Rechengesetze	(1) unmögliches Ereignis: $\mathrm{W}(\emptyset) = 0$; (2) $\mathrm{W}(A) \leq 1, \forall A \in \Sigma$; (3) Gegenwahrscheinlichkeit: $\mathrm{W}(A') = 1 - \mathrm{W}(A)$; (4) $A \subseteq B \Longrightarrow \mathrm{W}(A) \leq \mathrm{W}(B), \forall A, B \in \Sigma$ (5) Siebformel: $\mathrm{W}(A \cup B) = \mathrm{W}(A) + \mathrm{W}(B) - \mathrm{W}(A \cap B), \forall A, B \in \Sigma$; (6) Hat Σ höchstens abzählbar viele Elementarereignisse $\{e_i : i \in I\}$, dann ist $\sum_{i \in I} \mathrm{W}(e_i) = 1$
Dichtefunktion:	Ist $\Sigma(\Omega)$ kontinuierlich, ist die Wahrscheinlichkeit jedes Elementarereignisses gleich 0. Summation nicht möglich. Stattdessen: normierte Dichtefunktion $\mathrm{f}(x)$: $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{f}(x)\,dx = 1$. Daraus folgt Wahrscheinlichkeit $\mathrm{W}(A) = \int_A \mathrm{f}(x)\,dx$
G. d. gr. Zahlen	$\lim_{n \to \infty} \mathrm{f}_n(E) = \mathrm{W}(E)$ Der stochastische Limes der relativen (empirischen) Häufigkeit des Ereignisses E ist $\mathrm{W}(E)$.

Kombinatorik

Gleichwahrsch.	Sind von den Elementarereignissen $\{e_1,\dots,e_m\}$ alle gleichwahrscheinlich, so gilt: $W(e_1)=W(e_2)=\dots=W(e_m)=\frac{1}{m}$
Laplace Regel	Ist A ein Ereignis, das sich aus g Elementarereignisse zusammensetzt, dann gilt: $W(A)=\frac{g}{m}=\frac{\text{"günstige Fälle"}}{\text{"mögliche Fälle"}}$ z.B.: Wahrsch, dass sich beim Roulette in einer Serie von 10 Würfen keine Zahl wiederholt: $g=37\cdot 36\cdot\ldots\cdot 28; m=37^{10}$ z.B.: Wahrscheinlichkeit, dass in einer Serie von 37 Würfen jede Zahl vorkommt: $g=37!, m=37^{37}$
Variation ohne Wiederholung	Eine Variation V_k^n ist eine Auswahl von k Objekten aus einer Menge von n Objekten, bei der die Reihenfolge der Auswahl wichtig ist. Anzahl der Möglichkeiten, k von n Objekten auf k verfügbare Plätze zu platzieren. $V_k^n=\frac{n!}{(n-k)!}=(n\,\mathrm{nPr}\,k)$
Permutation	Sonderfall der Variation mit $k=n$. $V_n^n=n!$
Kombination (Binomialkoeff.)	Eine Kombination C_k^n ist eine Auswahl von k Objekten aus einer Menge von n Objekten, bei der die Reihenfolge der Auswahl keine Rolle spielt. Es gilt: $C_k^n=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=(n\,\mathrm{nCr}\,k)$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Bedingte relative Häufigkeit	$f(A\|B)=\frac{h(A\cap B)}{h(B)}$ Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B (z.B: sei A...weiblich; B...krank. Dann ist $f(A\|B)$ der Anteil von Frauen in der Untergruppe der Kranken.
Kopplung	$f(A\|B)>f(A)$ deutet auf eine positive Kopplung, $f(A\|B)<f(A)$ auf eine negative Kopplung.
Bedingte Wahrscheinlichkeit	$\lim_{n\to\infty} f_n(A\|B)=W(A\|B)=\frac{W(A\cap B)}{W(B)}$; $W(B\|A)=\frac{W(A\|B)\,W(B)}{W(A)}$ Produkt-Formel: $W(A\cap B)=W(A\|B)\,W(B)=W(B\|A)\,W(A)$
Zerlegung	Die Ereignisse $B_1,B_2,\dots,B_m$ bilden eine Zerlegung von Ω, wenn gilt (1) $B_i\cap B_j=\emptyset, i\neq j$ (2) $B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_m=\Omega$
Totale Wahrsch	Sei $B_1,B_2,\dots,B_m$ eine Zerlegung. Dann gilt: $W(A)=W(A\|B_1)\,W(B_1)+\dots+W(A\|B_m)\,W(B_m)$
Satz von Bayes	Sei $B_1,B_2,\dots,B_m$ eine Zerlegung. Dann gilt: $W(B_i\|A)=\frac{W(A\|B_i)\,W(B_i)}{W(A)}=\frac{W(A\|B_i)\,W(B_i)}{W(A\|B_1)\,W(B_1)+\dots+W(A\|B_m)\,W(B_m)}$ $W(B_i)$ ... a-priori-Wahrscheinlichkeit von B; $W(B_i\|A)$ ...a-posteriori-Wahrscheinlichkeit Bsp: Bauteil kommt zu 20% von Firma F_1, zu 30% von Firma F_2, zu 35% von Firma F_3 und zu 15% von Firma F_4. Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls innerhalb von x Stunden: 0.02 Fa. 1, 0.015 Fa. 2, 0.025 Fa. 3, 0.02 Fa. 4. Ein Bauteil fällt nach x Stunden aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass er von Firma F_i kommt. Lsg: $W(F_1)=0.2;\ W(F_2)=0.3;\ W(F_3)=0.35;\ W(F_4)=0.15$. Ereignis A: „Bauteil fällt aus nach x Stunden". a-priori-Wahrscheinlichkeit lt. Angabe: $W(A\|F_1)=0.02;\ W(A\|F_2)=0.015;\ W(A\|F_3)=0.025;\ W(A\|F_4)=0.02$ Gesuchte a-posterori-Wahrscheinlichkeit $W(F_i\|A)=\frac{W(A\|F_i)\,W(F_i)}{W(A\|F_1)\,W(F_1)+\dots+W(A\|F_4)\,W(F_4)}$
Unabhängigkeit	Ereignisse $A_1,\dots,A_n$ sind unabhängig, wenn $W(A_1\cap\ldots\cap A_n)=W(A_1)\cdot\ldots\cdot W(A_n)$
4-Felder-Korr.	$\rho=\frac{W(A\cap B)-W(A)\,W(B)}{\sqrt{W(A)\,W(A')\,W(B)\,W(B')}}$; $-1\le\rho\le 1$; $\rho>0$... positiv gekoppelt; $\rho<0$... negativ gekoppelt; $\rho=0$... unabhängig
Test auf Unabh.	Wenn $\|\sqrt{n}\cdot\rho\|>2$ wird die Annahme der Unabhängigkeit abgelehnt (mit der Wahrsch. einer Fehleinschätzung von 5%)

Diskrete Verteilungen

Dichtefunktion	Bei diskreten Verteilungen ist die Dichtefunktion $f_X(x)=W_x(\{e_i\})$ für $x=\{e_i\}$, sonst 0
Wahrscheinlichk.	$W_x(E)=\sum_{k\in E} f_X(k)$ Verteilungsfunktion: $F_x(x)=\sum_{k\le x} f_X(k)=\sum_{k\le x} W_X(\{k\})$
Erwartungswert	Sei $g:\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Dann ist $E_x[g]=E[g(X)]=\sum_{k\in\mathbb{N}_0} g(k)\,f_X(k)$ die Erwartung von $g(X)$
Mittelwert	Ist $g(k)=k$, dann ist $E[g(X)]=E[X]=\sum_{k\in\mathbb{N}_0} k\,f_X(k)$ die Erwartung bzw. der Mittelwert von X. Der Mittelwert ist ein Linearer Operator: $E[aX+b]=E[aX]+b$; $E[X_1+X_2]=E[X_1]+E[X_2]$
Varianz	$\mathrm{var}[X]=E[(X-E(X))^2]=E[X^2]-E[X]^2$. Es gilt: $\mathrm{var}[aX+b]=a^2\,\mathrm{var}[X]$. Invariant gegen Translation.
Std.abweichung	$\sigma[X]=\sqrt{\mathrm{var}[X]}=\sqrt{E[X^2]-E[X]^2}$. Es gilt: $\sigma[aX+b]=\|a\|\,\sigma[X]$. Invariant gegen Translation.

Zufallsvektoren

Zufallsvektor	Eine multivariate Zufallsvariable $\vec{X}$, deren n Komponenten diskrete Zufallsvariablen sind. z.B. 2x Würfeln: $\vec{X}=\{X_1,X_2\}$
Dichtefunktion Zufallsvektor	Die Funktion $f_{\vec{X}}(k_1,\dots,k_n)$, die dem Ergebnis $(k_1,\dots,k_n)$ eine Wahrscheinlichkeit unter der Verteilung von $\vec{X}$ zuordnet. $f_{\vec{X}}(k_1,\dots,k_n)=W_{\vec{X}}(k_1,\dots,k_n)=W(X_1=k_1\cap\ldots\cap X_n=k_n)$
Randverteilung	Die Randverteilung der Komponente X_i wird durch Summation über „alle übrigen Komponenten" berechnet
Unabhängigkeit	Sei $\vec{X}=(X_1,X_2)$ein diskreter Zufallsvektor mit der Dichte $f_{\vec{X}}(k_1,k_2)$. X_1 und X_2 sind unabhängig, wenn für alle (k_1,k_2) gilt: $f_{\vec{X}}(k_1,k_2)=W(X_1=k_1\cap X_2=k_2)=W(X_1=k_1)\,W(X_2=k_2)=f_{X_1}(k_1)\,f_{X_2}(k_2)$. Außerdem: Sind X_1 und X_2 unabhängig, dann gilt: $E[X_1\cdot X_2]=E[X_1]\cdot E[X_2]$
Kovarianz:	$\mathrm{cov}[X_1,X_2]=E[X_1X_2]-E[X_1]\,E[X_2]$. X_1 und X_2 sind unkorreliert, wenn $\mathrm{cov}[X_1,X_2]=0$. X_1,X_2unabh. $\Longrightarrow X_1,X_2$ unkorr.
Korrelations-matrix	$R_{ij}=\frac{\mathrm{cov}[X_i,X_j]}{\sqrt{\mathrm{cov}[X_i,X_i]\,\mathrm{cov}[X_j,X_j]}}=\frac{\mathrm{cov}[X_i,X_j]}{\sqrt{\mathrm{var}[X_i]\,\mathrm{var}[X_j]}}$ Symmetrisch, positive semidefinit. Enthält in der Diagonale 1.
Bedingte Dichte	Sei $\vec{X}=(X_1,X_2)$ ein diskreter Zufallsvektor mit der Dichte $f_{\vec{X}}(k_1,k_2)$ und den Randverteilungen $f_1(k_1)$ und $f_2(k_2)$. Dann ist $f(k_1\|k_2)=\frac{f_{\vec{X}}(k_1,k_2)}{f_2(k_2)}$

Alternativverteilung (Bernoullie-Experiment)

Die Alternativverteilung $\mathrm{Al}(p)$ repräsentiert einen einzelnen Versuch mit nur zwei möglichen Ausgängen („Erfolg" und „Misserfolg"). Die Wahrscheinlichkeit eines „Erfolgs" sei p. $\mathrm{Al}(p)=\mathrm{Bi}(1,p)$

Dichtefunktion	$f(k)=W(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$ ... $k\in\{0,1\}$; $f(1)=p$ ... Wahrscheinlichkeit für Erfolg; $f(1)=1-p$ ... Wahrscheinlichkeit für Misserfolg
Erwartung	$E(X)=p$ Varianz: $\mathrm{var}[X]=p(1-p)$

Binomialverteilung (Ziehen mit Zurücklegen; wiederholter Alternativversuch)

Der Anteil der Objekte mit einer Eigenschaft E in der Grundgesamtheit sei p. Es werden n Objekte gezogen und wieder zurückgelegt. Die Anzahl der gezogenen Objekte mit der Eigenschaft E ist eine diskrete Zufallsvariable X mit der Verteilung $X \sim \mathrm{Bi}(n,p)$.

Dichtefunktion	$\mathrm{f}(k) = \mathrm{W}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \mathrm{BinomialPdf}(n,p,k)$ … Wahrscheinlichk. von k Erfolgen bei n Wiederholungen				
Verteilungsfkt.	$\mathrm{F}(x) = \mathrm{W}(X \leq x) = \sum_{k=0}^{[x]} \mathrm{f}(k) = \mathrm{BinomialCdf}(n,p,k)$ … Wahrscheinlichkeit von höchstens k Erfolgen bei n Wiederh.				
Erwartung	$\mathrm{E}(X) = np$	Varianz:	$\mathrm{var}[X] = np(1-p)$	Standardabweichung:	$\sigma[X] = \sqrt{\mathrm{var}[X]} = \sqrt{np(1-p)}$
Schätzer $\hat{p}$	$\hat{p} = \frac{m}{n}$ mit m…beobachteter Wert von X	EW-Wert von $\hat{p}$	$\mathrm{E}[\hat{p}] = \frac{\mathrm{E}[X]}{n} = \frac{np}{n} = p$ (unverzerrt)		
Varianz von $\hat{p}$	$\mathrm{var}[\hat{p}] = \frac{\mathrm{var}[X]}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n} \approx \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$				

Hypergeometrische Verteilung (Ziehen ohne Zurücklegen)

Grundgesamtheit der Größe N. Davon haben M Objekte die Eigenschaft E. Es werden n Objekte gezogen und nicht zurückgelegt. Die Anzahl der gezogenen Objekte mit der Eigenschaft E ist eine diskrete Zufallsvariable X mit der Verteilung $X \sim \mathrm{Hy}(N,M,n)$. Bsp: Lotto 6 aus 45.

Dichtefunktion:	$\mathrm{f}(m) = \mathrm{W}(X = m) = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} = \frac{(M \,\mathrm{nCr}\, m)((N-M)\,\mathrm{nCr}\,(n-m))}{(N\,\mathrm{nCr}\,n)}$ … Wahrscheinlichk. von m Erfolgen bei n Wiederholungen		
Erwartungswert	$\mathrm{E}[X] = \frac{nM}{N}$; mit $p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{M}{N} \Longrightarrow \mathrm{E}[X] = np$	Varianz:	$\mathrm{var}[X] = \frac{nM(N-n)(N-M)}{N^2(N-1)}$; mit $p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{M}{N} \Longrightarrow \mathrm{var}[X] = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$
Schätzer $\widehat{M}$:	$\widehat{M} = N\frac{m}{n}$	Erwartung von $\widehat{M}$:	$\mathrm{E}[\widehat{M}] = N\frac{\mathrm{E}[X]}{n} = N\frac{nM}{N}\frac{1}{n} = M$ (unverzerrt)
Varianz von $\widehat{M}$:	$\mathrm{var}[\widehat{M}] = N^2\frac{\mathrm{var}[X]}{n^2} = \frac{N^2}{n^2}\frac{nM(N-n)(N-M)}{N^2(N-1)} \approx \frac{\widehat{M}(N-n)(N-\widehat{M})}{n(N-1)}$		
Schätzer $\widehat{N}$:	$\widetilde{N} = M\frac{n}{m}$ mit m…beobachteter Wert von X	Erwartung von $\widetilde{N}$:	$\mathrm{E}[\widehat{N}] \approx M\frac{n}{\mathrm{E}[X]} = N$ (nicht exakt erwartungstreu)
Varianz von $\widehat{N}$:	$\mathrm{var}[\widehat{N}] = \frac{\widehat{N}^2(\widehat{N}-n)(\widehat{N}-M)}{nM(\widehat{N}-1)}$		
Beispiel 1:	Wahrscheinlichkeit eines „Vierers" beim Lotto „6 aus 45": $\mathrm{W}(X=4) = \frac{(6\,\mathrm{nCr}\,4)((45-6)\,\mathrm{nCr}\,(6-4))}{(45\,\mathrm{nCr}\,6)} = 0.00136$		
Beispiel 2:	Bei einer Lieferung von N=1000 Widerständen sind M=20 Stück defekt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit in einer Stichprobe von n=50 mehr als 2 defekte Stücke zu finden? $\mathrm{W}(X > 2) = 1 - \mathrm{W}(X \leq 2) = 1 - \mathrm{f}(0) - \mathrm{f}(1) - \mathrm{f}(2) = 0.0736$		
Beispiel 3:	In einem Teich werden $M = 200$ Fische markiert. Später werden $n = 100$ Fische gefangen, von denen $m = 21$ eine Markierung aufweisen. $\widetilde{N} = M\frac{n}{m} = 200\frac{100}{21} \approx 952$; $\sigma[\widetilde{N}] = \sqrt{\frac{\widetilde{N}^2(\widetilde{N}-n)(\widetilde{N}-M)}{nM(\widetilde{N}-1)}} = \sqrt{\frac{952^2(952-100)(952-200)}{100 \cdot 200(952-1)}} \approx 175$		

Poissonverteilung

Die Poissonverteilung $\mathrm{Po}(\lambda)$ entsteht aus der Binomialverteilung durch den Grenzübergang $n \to \infty$ unter der Bedingung $np = \lambda$.
Ist die Wartezeit zwischen zwei Ereignissen exponentialverteilt, dann ist die Anzahl der Ereignisse pro Zeiteinheit poissonverteilt.
Beispiel: Anzahl X Zerfälle pro Zeiteinheit bei einer radioaktiven Quelle, Ankünfte von Kunden, allg. „seltene Ereignisse".
Die Wartezeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen ist exponentialverteilt mit $\mathrm{Ex}(1/\lambda)$

Dichtefunktion:	$\mathrm{f}(k) = \lim_{N\to\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \mathrm{PoissonPdf}(\lambda,k)$ Wahrscheinlichkeit von genau k Ereignissen in einem Intervall, wenn man im Mittel λ Ereignisse pro Intervall erwartet.				
Verteilungsfkt.:	$\mathrm{F}(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \mathrm{PoissonCdf}(\lambda,n)$ … Wahrscheinlichkeit für höchstens n Ereignisse, wo man im Mittel λ erwartet.				
Erwartung:	$\mathrm{E}[X] = \lambda$	Varianz:	$\mathrm{var}[X] = \lambda$	Standardabweichung:	$\sigma[X] = \sqrt{\mathrm{var}[X]} = \sqrt{\lambda}$
Schätzer $\hat{\lambda}$:	$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$	Erwartung $\hat{\lambda}$:	$\mathrm{E}[\hat{\lambda}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[X_i] = \lambda$ (unverzerrt)	Varianz von $\tilde{\lambda}$:	$\mathrm{var}[\tilde{\lambda}] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}[X_i] = \frac{\lambda}{n}$

Multinomialverteilung

Verallgemeinerung des Alternativversuchs mit statt zwei nunmehr d Ausgängen $\{e_1, \dots, e_d\}$, denen die Wahrscheinlichkeiten $\{p_1, \dots, p_d\}$ zugeordnet sind, so dass $p_1 + \cdots + p_d = 1$. Insgesamt n Wiederholungen. Sei X_i die Anzahl der Fälle, in denen das Ergebnis in die Gruppe i fällt, dann ist der Zufallsvektor $\vec{X} = (X_1, \dots, X_d)$ multinomial verteilt mit $\vec{X} \sim \mathrm{Mu}(n, p_1, \dots, p_d)$

Dichtefunktion:	$\mathrm{f}(n_1, \dots, n_d) = \frac{n!}{n_1! \dots n_d!}\left(p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_d^{n_d}\right)$ … Wahrscheinlichkeit von jeweils n_i Ereignissen in Kategorie i bei n Wdh.						
Erwartung n_i	$\mathrm{E}[n_i] = n_i p_i$	Varianz von n_i:	$\mathrm{var}[n_i] = n_i p_i (1 - p_i)$	Kovar.:	$\mathrm{cov}[n_i, n_j] = -n_i p_i p_j$	Kovar.matrix:	$C_{ij} = \delta_{ij} n p_i - n p_i p_j$

Stetige Verteilungen

Dichtefunktion	Die Wahrscheinlichkeit $W_X(A)$ eines Ereignisses A lässt sich mit der Dichte $f_X(x)$ berechnen: $W_X(A) = \int_A f_X(x)\,dx$		
Verteilungsfkt.	Die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ ist definiert durch $F_X(x) = W(X \le x)$. Es gilt: $W_X(x_1 < x < x_1) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$ Eigenschaften: (1) $0 \le F(x) \le 1$; (2) $x_1 \le x_2 \Longrightarrow F(x_1) < F(x_2)$; (3) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$; $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\,dx'$		
Quantilsfunkt.	$x = F_X^{-1}(\alpha)$ ist die Quantilsfunktion. $\alpha = 0.25, \alpha = 0.5, \alpha = 0.75$ … „Quartile". Quantil $\alpha = 0.5$ … „Median".		
Erwartungswert	$\mathrm{E}_X[g] = \mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f_X(x)\,dx$.	Mittelwert:	$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f_X(x)\,dx$ (Erwartung, Mittelwert) Linearer Operator.
Varianz	$\mathrm{var}[X] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))^2] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(X-\mathrm{E}(X))^2\,f_X(x)\,dx$. Es gilt: $\mathrm{var}[aX+b] = a^2\,\mathrm{var}[X]$.		
Std.abweichung	$\sigma[X] = \sqrt{\mathrm{var}[X]} = \sqrt{\mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2}$. Es gilt: $\sigma[aX+b] = \lvert a\rvert\,\sigma[X]$. Invariant gegen Translation.		
Moment	Verallgemeinerung von Erwartung und Varianz: $\mathrm{E}[(x-a)^k] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^k\,f_X(x)\,dx$ heißt k-tes Moment.		
Multivar Dichte	Eine normierte Funktion $f_{\vec{X}}(x_1,\dots,x_n)$ ist pot. Dichtefunktion des Zufallsvektors $\vec{X}$. Es gilt $W_X(A) = \int_A f_X(x_1,\dots,x_n)\,d^n x$		
Randverteilung	Dichte der Randverteilung: $f_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1,\dots,x_n)\,dx_1 \dots dx_{i-1}dx_{i+1} \dots dx_n$		
Unabhängig	Sei $\vec{X} = (x_1, x_2)$. Dann sind X_1 und X_2 unabhängig, wenn $f_{\vec{X}}(x_1,x_2) = f_1(x_1)\,f_2(x_2)$ X_1 und X_2 unabhängig $\Longrightarrow \mathrm{E}[X_1X_2] = \mathrm{E}[X_1]\,\mathrm{E}[X_2]$		
Bedingte Dichte	Sei $\vec{X} = (X_1, X_2)$ stetig mit Dichte $\mathrm{f}(x_1,x_2)$ und Randverteilungsdichten $\mathrm{f}_1(x)$ und $\mathrm{f}_2(x_2)$. Dann ist $\mathrm{f}_{1\mid 2}(x_1\mid x_2) = \frac{\mathrm{f}(x_1,x)}{\mathrm{f}_2(x)}$		
Totale Wahrsch	$\mathrm{f}_2(x_2) = \int \mathrm{f}_{2\mid 1}(x_2\mid x_1)\,\mathrm{f}_1(x_1)\,dx_1$	Satz von Bayes:	$\mathrm{f}_{1\mid 2}(x_1\mid x_2) = \frac{\mathrm{f}_{2\mid 1}(x_2\mid x_1)\,\mathrm{f}_1(x_1)}{\int \mathrm{f}_{2\mid 1}(x_2\mid x_1)\,\mathrm{f}_1(x_1)\,dx_1}$

Gleichverteilung

Die Gleichverteilung $\mathrm{Un}(a,b)$ ordnet allen Werten im Intervall $[a,b]$ die gleiche Wahrscheinlichkeit zu

Dichtefunktion:	$\mathrm{f}(x\mid a,b) = \frac{1}{b-a}\mathrm{I}_{[a,b]}(x)$	Verteilungsfkt:	$\mathrm{F}(x\mid a,b) = \min\left(1, \max\left(0, \frac{x-a}{b-a}\right)\right)$	Erwartg:	$\mathrm{E}[X] = \frac{a+b}{2}$	Var.:	$\mathrm{var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$

Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung $\mathrm{Ex}(\tau)$ ist die Wartezeitverteilung des radioaktiven Zerfalls von Atomen und Elementarteilchen.
Sie ist ein Sonderfall der Gammaverteilung: $\mathrm{Ex}(\tau) = \mathrm{Ga}(1,\tau)$. τ ist die mittlere Wartezeit.
Sind die Wartezeiten unabhängig und exponentialverteilt, dann ist der Prozess ein Poissonprozess gemäß $\mathrm{Po}(1/\tau)$

Dichtefunktion:	$\mathrm{f}(x\mid\tau) = \frac{1}{\tau}e^{-x/\tau}\,\mathrm{I}_{[0,\infty)}(x)$	Verteilungsfunktion:	$\mathrm{F}(x\mid\tau) = (1 - e^{-x/\tau})\,\mathrm{I}_{[0,\infty)}(x)$		
Erwartungswert	$\mathrm{E}[X] = \tau$	Varianz:	$\mathrm{var}[X] = \tau^2$	Median, HW-Zeit:	$\mathrm{med}[X] = t_{1/2} = \tau\ln(2)$

Normalverteilung

Die besondere Bedeutung der Normalverteilung $\mathrm{No}(\mu,\sigma^2)$ beruht auf dem zentralen Grenzwertsatz, dem zufolge Verteilungen, die durch Überlagerung einer großen Zahl von unabhängigen Einflüssen entstehen, annähernd normalverteilt sind.

Dichtefunktion:	$\mathrm{f}(x\mid\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \mathrm{NormalPdf}(x,\mu,\sigma)$	Verteilungsfkt:	$\mathrm{F}(x\mid\mu,\sigma^2) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right) = \mathrm{NormalCdf}(\mu,\sigma,0,x)$						
Erwartungswert	$\mathrm{E}[X] = \mu$	Varianz:	$\mathrm{var}[X] = \sigma^2$	Median:	$\mathrm{med}[X] = \mu$	WP v. $\mathrm{f}(x)$ bei $x = \mu \pm \sigma$	½ Breite ½ Höhe:	HWHM = $\sigma\sqrt{2\ln(2)}$	
$\sigma, 2\sigma, 3\sigma$:	$W(\lvert X-\mu\rvert \le \sigma) \approx 68\%$; $W(\lvert X-\mu\rvert \le 2\sigma) \approx 95\%$; $W(\lvert X-\mu\rvert \le 3\sigma) \approx 99.7\%$;								

Standardnormalverteilung

Die Normalverteilung $\mathrm{No}(0,1)$ wird als Standardnormalverteilung bezeichnet. Ist $X \sim \mathrm{No}(\mu,\sigma^2)$, dann ist $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{No}(0,1)$ („Stand.score")

Dichtefunktion:	$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} = \mathrm{NormalPdf}(x,0,1)$	Verteilungsfunktion:	$\mathrm{F}(x\mid 0,1) = \mathrm{NormalCdf}(0,1,0,x)$

Gammaverteilung

Die Gammaverteilung $\mathrm{Ga}(a,b)$ ist eine Verallgemeinerung der Exponentialverteilung und der χ^2-Verteilung

Dichtefunktion:	$\mathrm{f}(x\mid a,b) = \frac{1}{b^a\,\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-x/b}\,\mathrm{I}_{[0,\infty)}(x)$	Verteilungsfkt.:	$\mathrm{F}(x\mid a,b) = \frac{1}{b^a\,\Gamma(a)}\int_0^x x^{a-1}e^{-x/b}\,dx = \frac{\gamma(a,x/b)}{\Gamma(a)}$
Erwartungswert	$\mathrm{E}[X] = ab$	Varianz:	$\mathrm{var}[X] = ab^2$

Standard-Cauchyverteilung oder Breit-Wiegner-Verteilung

Die Cauchy-Verteilung ist eine T-Verteilung mit einem Freiheitsgrad $\mathrm{T}(1)$. Sie hat keinen Erwartungswert.

Dichtefunktion:	$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$	Verteilungsfunktion:	$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x)$

T-Verteilung

Die T-Verteilung $\mathrm{T}(n)$ ist eine Verallgemeinerung der Standard-Cauchy-Verteilung.

Dichtefunktion:	$\mathrm{f}(x\mid n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$	Erwartung:	$\mathrm{E}[X] = 0$ für $n > 1$	Varianz:	$\mathrm{var}[X] = \frac{n}{n-2}$ für $n > 2$

χ^2-Verteilung

Die χ^2-Verteilung ist die Gamma-Verteilung $\mathrm{Ga}(n/2, 2)$. Ist $X \sim \mathrm{No}(0,1)$, dann ist $X^2 \sim \chi^2(1)$

Dichtefunktion:	$\mathrm{f}(x\mid n) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-x/2}\,\mathrm{I}_{[0,\infty)}(x)$	Verteilungsfkt:	$\mathrm{F}(x) = \frac{\gamma(n/2,x/2)}{\Gamma(n/2)}$	Erwartung:	$\mathrm{E}[X] = n$	Varianz:	$\mathrm{var}[X] = 2n$

Funktionen von Zufallsvariablen

diskrete Zuf.var	Sei X eine diskrete Zufallsvariable und $Y = \mathrm{h}(X)$, differenzierbar und eindeutig umkehrbar. Dann ist $\mathrm{W}_Y(k) = \mathrm{W}_X(\mathrm{h}^{-1}(k))$
stetige Zuf.var.:	Sei X eine stetige Zufallsvariable und $Y = \mathrm{h}(x)$, diffbar und eindeutig umkehrbar. Dann ist $\mathrm{f}_Y(y) = \mathrm{f}_X(\mathrm{h}^{-1}(y))\left\lvert\frac{d}{dy}\mathrm{h}^{-1}(y)\right\rvert$ Beispiel: $\mathrm{f}_X(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$; $Y = \cos(x) \Longrightarrow \mathrm{f}_Y(y) = \frac{1}{2}\sin(\arccos(y))\left\lvert\frac{d}{dy}\arccos(x)\right\rvert = \frac{1}{2}\sin(\arccos(y))\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2}$
Zufallsvektor:	Ist $\vec{X}$ ein stetiger Zufallsvektor und $\vec{Y} = \vec{\mathrm{h}}(\vec{x})$, diffbar und eindeutig umkehrbar. Dann: $\mathrm{f}_{\vec{Y}}(\vec{y}) = \mathrm{f}_{\vec{X}}\left(\vec{\mathrm{h}}^{-1}(\vec{y})\right)\det\left\lvert\frac{d}{d\vec{y}}\vec{\mathrm{h}}^{-1}(\vec{y})\right\rvert$

Addition von zwei unabhängigen Zufallsvariablen (Faltung)

$X_1 + X_2$	Seien X_1 und X_2 zwei unabhängige Zufallsvariable mit der gemeinsamen Dichte $\mathrm{f}(x_1, x_2) = \mathrm{f}_1(x_1)\,\mathrm{f}_2(x_2)$. Dann hat $X_1 + X_2$ die Dichte $\mathrm{g}(x) = [f_1 * f_2](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}_1(x - x_2)\,\mathrm{f}_2(x_2)\,dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}_1(x_1)\,\mathrm{f}_2(x - x_1)\,dx_1$
Normalverteilg.	Sei $X_1 \sim \mathrm{No}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim \mathrm{No}(\mu_2, \sigma_2^2) \Longrightarrow (X_1 + X_2) \sim \mathrm{No}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
Poissonverteilg.	Sei $X_1 \sim \mathrm{Po}(\lambda_1)$ und $X_2 \sim \mathrm{Po}(\lambda_2) \Longrightarrow (X_1 + X_2) \sim \mathrm{Po}(\lambda_1 + \lambda_2)$
χ^2-Verteilung	Sei $X_1 \sim \chi^2(n_1)$ und $X_2 \sim \chi^2(n_2) \Longrightarrow (X_1 + X_2) \sim \chi^2(n_1 + n_2)$

Fehlerfortpflanzung

Affine Trafo	Sei X eine diskrete Zufallsvariable und $Y = aX + b$, dann ist $\mathrm{E}[Y] = a\,\mathrm{E}[X] + b$ und $\mathrm{var}[Y] = a^2\,\mathrm{var}[X]$
Linearkomb.	Sei $Z = aX + bY + c$, dann ist $\mathrm{E}[Z] = a\,\mathrm{E}[X] + b\,\mathrm{E}[Y] + c$ und $\mathrm{var}[Z] = a^2\,\mathrm{var}[X] + b^2\,\mathrm{var}[Y]$
Nichlin. Trafo	Sei $Y = \mathrm{h}(X)$ eine beliebige nichlin. Funktion Dann: $\mathrm{E}[Y] \approx \mathrm{h}(\mathrm{E}[X]) + \mathrm{h}'(\mathrm{E}[X])\,(x - \mathrm{E}[X]) + \frac{1}{2}\mathrm{h}''(\mathrm{E}[X])\,\mathrm{var}[X]$, und $\mathrm{var}[Y] \approx \mathrm{h}'(\mathrm{E}[X])^2\,\mathrm{var}[X]$ („Gesetz der linearen Fehlerfortpflanzung“)
Beispiel	$U = RI \Longrightarrow \mathrm{var}[U] \approx \left(\frac{\partial U}{\partial R}\Big\vert_{\mathrm{E}[X]}\right)^2 \mathrm{var}[R] + \left(\frac{\partial U}{\partial I}\Big\vert_{\mathrm{E}[X]}\right)^2 \mathrm{var}[I] = I^2\,\mathrm{var}[R] + R^2\,\mathrm{var}[I]$
Vektor, lin. Trafo:	Sei $\vec{X}$ ein Zufallsvektor und H eine Matrix, und $\vec{Y} = H\vec{X}$. Dann: $\mathrm{E}[\vec{Y}] = H\,\mathrm{E}[\vec{X}]$ und $\mathrm{Cov}[\vec{Y}] = H\,\mathrm{Cov}[\vec{X}]\,H^T$
Vektor, allg Trafo:	Sei $\vec{X}$ ein Zufallsvektor und $\vec{Y} = \vec{\mathrm{h}}(\vec{X})$ eine beliebige nichlin. Fkt. Dann: $\mathrm{E}[\vec{Y}] \approx \vec{\mathrm{h}}(\mathrm{E}[\vec{X}])$ und $\mathrm{Cov}[\vec{Y}] = \left(\frac{\partial \vec{h}}{\partial \vec{x}}\right) \mathrm{Cov}[\vec{X}] \left(\frac{\partial \vec{h}}{\partial \vec{x}}\right)^T$

Stichprobenfunktionen

Stichprobe	Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabh. Zufallsvariablen mit derselben Verteilungsfkt F. Dann bilden sie eine Stichprobe der Verteilung F.	
Stichprobenfkt	$Y = \mathrm{h}(X_1, \ldots, X_n)$ heißt Stichprobenfunktion	
Stichprb.mittel	$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	Hat F Mittel μ und Varianz $\mathrm{var}[X] = \sigma^2$, dann: $\mathrm{E}[\bar{X}] = \mu$; $\mathrm{var}[\bar{X}] = \frac{\mathrm{var}[X]}{n}$ Wenn $F = \mathrm{No} \Longrightarrow \bar{X} \sim \mathrm{No}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
Zentr. GW-Satz	Hat F das Mittel μ und die Varianz σ^2, dann konvergiert die Verteilung von $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ gegen die Normalverteilung	
Stichproben-varianz	$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$	Hat F die Varianz $\sigma^2 \Longrightarrow \mathrm{E}[S^2] = \sigma^2$ Ist $F = \mathrm{No}(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$; $\mathrm{var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$; $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim \mathrm{T}(n-1)$; $\bar{X}, S^2$ unabh.
Stichproben-median	$\tilde{X} = \begin{cases} X_{(n+1)/2} & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2}\left(X_{n/2} + X_{\frac{n}{2}+1}\right) & n \text{ ungerade} \end{cases}$	Hat F den Median m und die Dichte f, dann gilt im Limes $n \to \infty$: $\mathrm{E}[\tilde{X}] \to m$; $\mathrm{var}[\tilde{X}] \to \frac{1}{4n\,f^2(m)}$ für $\mathrm{f}(m) > 0$; $\tilde{X} \sim \mathrm{No}$ für $\mathrm{f}(m) > 0$

Punktschätzer

Punktschätzer	Ein PS T ist eine Stichprobenfunktion, die einen möglichst guten Näherungswert für einen Verteilungsparameter ϑ liefert.
Erwartungstreu unverzerrt	Ein Punktschätzer T für den Parameter ϑ ist unverzerrt (erwartungstreu), wenn $\mathrm{E}_\vartheta[T] = \vartheta$ Ein Punktschätzer T für den Parameter ϑ ist asymptotisch unverzerrt (erwartungstreu), wenn $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}_\vartheta[T] = \vartheta$
MSE	Mittlere quadratische Abweichung von T für den Parameter ϑ ist: $\mathrm{MSE}[T] = \mathrm{E}_\vartheta[(T - \vartheta)^2]$
MSE-Konsistenz	Ein Punktschätzer T für den Parameter ϑ ist MSE-konsistent, wenn $\lim_{n\to\infty} \mathrm{MSE}[T]{=}0$
MSE-Effizienz	Ein Punktschätzer T_1 ist MSE-effizienter als der Punktschätzer T_2, wenn gilt: $\mathrm{MSE}[T_1] < \mathrm{MSE}[T_2]$
Effizienz	Ein Punktschätzer T_1 ist effizienter als der unverzerrte Punktschätzer T_2, wenn gilt: $\mathrm{var}[T_1] < \mathrm{varMSE}[T_2]$ Ein unverzerrter Punktschätzer T heißt effizient, wenn seine Varianz den kleinstmöglichen Wert annimmt.
Fisher Informat.	Es sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Stichprobe mit der gemeinsamen Dichte $\mathrm{g}(x_1, \ldots, x_n \vert \vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{g}(x_i \vert \vartheta)$. Dann ist $I_\vartheta = \mathrm{E}\left[-\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{g}(x_i \vert \vartheta)\right)\right] = \mathrm{E}\left[-\frac{\partial}{\partial\vartheta}\ln(\mathrm{L}(\vartheta \vert x_1, \ldots, x_n))\right]$ mit $\mathrm{L}(\vartheta \vert x_1, \ldots, x_n)$...Likelihood-Funktion (s.u.)
Rao Cramer	Die Varianz eines unverzerrten Schätzer für den Parameter ϑ ist beschränkt mit $\mathrm{var}[T] \geq \frac{1}{I_\vartheta}$
Mittelwert Schätzer	Verteilung F mit Erwartung $\mu \Longrightarrow \bar{X}$ ist unverzerrter Punktschätzer von μ Verteilung F mit Erwartung μ und endlicher Varianz $\sigma^2 \Longrightarrow \bar{X}$ ist MSE-konsistent $F = \mathrm{No}(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow \bar{X} \sim \mathrm{No}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$; $I_\mu = \frac{n}{\sigma^2}$; $\bar{X}$ effizient für μ $F = \mathrm{Ex}(\tau) \Longrightarrow \bar{X} \sim \mathrm{Ga}$; $\mathrm{E}(\bar{X}) = \tau, \mathrm{var}(\bar{X}) = \mathrm{var}(\tau) = \frac{\tau^2}{n}$; $I_\tau = \frac{n}{\tau^2}$; $\bar{X}$ effizient für τ $F = \mathrm{Po}(\lambda) \Longrightarrow \mathrm{E}(\bar{X}) = \lambda$; $\mathrm{var}(\bar{X}) = \mathrm{var}(\lambda) = \frac{\lambda}{n}$; $I_\lambda = \frac{n}{\lambda}$; $\bar{X}$ effizient für λ $F = \mathrm{Al}(p) \Longrightarrow \mathrm{E}(\bar{X}) = p$; $\mathrm{var}(\bar{X}) = \mathrm{var}(p) = \frac{p(1-p)}{n}$; $I_p = \frac{n}{p(1-p)}$; $\bar{X}$ effizient für p
Varianz Schätzer	Verteilung F mit Erwartung μ und Varianz $\sigma^2 \Longrightarrow S^2$ ist unverzerrter Punktschätzer von σ^2 Verteilung F hat viertes zentrales Moment $\mu_4 \Longrightarrow \mathrm{var}(S^2) = \frac{\mu_4}{n} - \frac{(n-3)\mu_2^2}{n(n-1)}$ und S^2 ist MSE-konsistent $F = \mathrm{No}(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$; $\mathrm{var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$; $I_{\sigma^2} = \frac{n}{2\sigma^4}$; S^2 asymptotisch effizienter Punktschätzer für σ^2
Median Schätzer	Verteilung F mit Median m und Dichte $f \Longrightarrow$ Stichprobenmedian $\tilde{X}$ ist asymptotisch unverzerrter Punktschätzer von m Verteilung F mit Median m und Dichte f, symmetrisch $\Longrightarrow \tilde{X}$ ist unverzerrter Punktschätzer von m Verteilung F mit Median m und Dichte $\mathrm{f}(m) > 0 \Longrightarrow$ Stichprobenmedian $\tilde{X}$ ist MSE-konsistent $F = \mathrm{No}(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow \mathrm{var}(\tilde{X}) = \frac{2\pi\sigma^2}{4n}$ $F = \mathrm{T}(3) \Longrightarrow \mathrm{var}(\tilde{X}) = \frac{1}{4n\,\mathrm{f}^2(0)}$

Maximum-Likelihood-Schätzer

Likelihood-Funktion L	Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Stichprobe mit der gemeinsamen Dichte $g(x_1, \dots, x_n \vert \vartheta) = \prod_{i=1}^{n} g(x \vert \vartheta)$. Dann ist die Likelihood-Funktion $L(\vartheta \vert x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i \vert \vartheta)$
ML-Schätzer	Der plausible oder ML-Schätzer $\hat{\vartheta}$ ist jener Wert von ϑ, bei dem $L(\vartheta \vert x_1, \dots, x_n) \to max$ (oder $\ln(L(\vartheta \vert x_1, \dots, x_n)) \to max$)
Bernoulli	$F = \mathrm{Al}(p) \Longrightarrow \hat{p} = \bar{X}$ (unverzerrt, effizient) | Poisson: $F = \mathrm{Po}(\lambda) \Longrightarrow \hat{\lambda} = \bar{X}$ (unverzerrt, effizient)
Exponentialvert	$F = \mathrm{Ex}(\tau) \Longrightarrow \hat{\tau} = \bar{X}$ (unverzerrt, effizient) | Normalvert. $F = \mathrm{No}(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow \hat{\mu} = \bar{X}$ (unv.,eff.) , $\hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n} S^2$ (unv., asymp.eff)
Gleichverteilg.	$F = \mathrm{Un}(0, b) \Longrightarrow \hat{b} = \max_i(X_i)$ asymptotisch unverzerrt; $\mathrm{E}[\hat{b}] = \frac{n}{n+1}$; $\mathrm{var}[\hat{b}] = \frac{b^2 n}{(n+2)(n+1)^2}$
Satz	$\exists\ L'(\vartheta), L''(\vartheta), I_g(\vartheta)\ \forall \vartheta$ und ist $\mathrm{E}[(\ln(L))'] = 0 \Longrightarrow \hat{\vartheta}$ ist asymptotisch normalverteilt mit Mittel ϑ und Varianz $1/I_g(\vartheta)$ $\Longrightarrow \hat{\vartheta}$ ist asymptotisch unverzerrt und asymptotisch effizient $\Longrightarrow \hat{\vartheta}$ ist konsistent

Intervall-Schätzer (Konfidenzinterwalle)

Konfidenzinterv	Ein Intervall mit den Grenzen G_1 und G_2 heißt Konfidenzintervall mit Sicherheit $1-\alpha$, wenn $W(G_1 \le \vartheta \le G_2) = 1-\alpha$
symmetrisch:	$W(\vartheta \le G_1) = W(\vartheta \ge G_2)$ | linksseitig: $W(-\infty \le \vartheta \le G_2) = 1-\alpha$ | rechtsseitig: $W(G_1 \le \vartheta \le \infty) = 1-\alpha$
Mittelwert Alternativ-verteilung	Stichprobe aus $\mathrm{Al}(p)$. Für große n ist $\hat{p} = \bar{X} \sim \mathrm{No}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$. Standardscore $Z = \frac{\hat{p}-p}{\sigma[\hat{p}]} \sim \mathrm{No}(0,1) \Longrightarrow$ $W(-z_{1-\alpha/2} \le Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha \Longrightarrow W\left(\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma[\hat{p}] \le p \le \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\,\sigma[\hat{p}]\right) = 1-\alpha$
Mittelwert Normalverteilung, σ^2 bekannt	Stichprobe aus $\mathrm{No}(\mu, \sigma^2)$. $\bar{X} \sim \mathrm{No}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. Standardscore $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{No}(0,1) \Longrightarrow$ $W(-z_{1-\alpha/2} \le Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha \Longrightarrow W(\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}) = 1-\alpha$
Mittelwert Normalverteilung, σ^2 unbekannt	Stichprobe aus $\mathrm{No}(\mu, \sigma^2)$. $\bar{X} \sim \mathrm{No}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. Standardscore $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim \mathrm{T}(n-1) \Longrightarrow$ $W(-t_{1-\alpha/2}^{n-1} \le T \le t_{1-\alpha/2}^{n-1}) = 1-\alpha \Longrightarrow W(\bar{X} - t_{1-\alpha/2}^{n-1}S/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{X} + t_{1-\alpha/2}^{n-1}S/\sqrt{n}) = 1-\alpha$
Mittelwert Exponential-verteilung:	Stichprobe aus $\mathrm{Ex}(\tau)$. $T = \sum_{i=1}^{n} X_i = n\bar{X} \sim \mathrm{Ga}(n, \tau) \Longrightarrow \frac{T}{\tau} \sim \mathrm{Ga}(n, 1) \Longrightarrow$ $W\left(\gamma_{\alpha/2,n,1} \le \frac{T}{\tau} \le \gamma_{1-\alpha/2,n,1}\right) = 1-\alpha \Longrightarrow W\left(\frac{T}{\gamma_{1-\alpha/2,n,1}} \le \tau \le \frac{T}{\gamma_{\alpha/2,n,1}}\right) = 1-\alpha$
Mittelwert Poisson-verteilung:	Stichprobe aus $\mathrm{Po}(\lambda)$. $K = \sum_{i=1}^{n} X_i = n\bar{X} \sim \mathrm{Po}(n\lambda) \approx \mathrm{Ga}(K, 1) \Longrightarrow$ $W(\gamma_{\alpha/2,K,1} \le K \le \gamma_{1-\alpha/2,K+1,1}) = 1-\alpha \Longrightarrow W\left(\frac{\gamma_{\alpha/2,n,1}}{n} \le \lambda \le \frac{\gamma_{1-\alpha,K+1,1}}{n}\right) = 1-\alpha$
Mittelwert beliebige Verteilung	Stichprobe aus beliebiger Verteilung. Grenzwertsatz: Für große $n \Longrightarrow Z \approx \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim \mathrm{No}(0,1) \Longrightarrow$ $W(-z_{1-\alpha/2} \le Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha \Longrightarrow W(\bar{X} - z_{1-\alpha/2}S/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{X} + z_{1-\alpha/2}S/\sqrt{n}) = 1-\alpha$
Varianz Normal-verteilung	Stichprobe aus $\mathrm{No}(\mu, \sigma^2)$. Schätzer $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \Longrightarrow$ $W\left(\chi_{\alpha/2,n-1}^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi_{1-\alpha/2,n-1}^2\right) = 1-\alpha \Longrightarrow W\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2,n-1}^2} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2,n-1}^2}\right) = 1-\alpha$
Mittelwert Alternativ-verteilung	Stichprobe aus $\mathrm{Al}(p)$. Standardscore $Z = \frac{\hat{p}-p}{\sigma[\hat{p}]} \sim \mathrm{No}(0,1)$ (für große n)$\Longrightarrow$ $W\left(-z_{1-\alpha/2} \le \frac{\hat{p}-p}{\sigma[\hat{p}]} \le z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha \Longrightarrow W(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\hat{\sigma} \le p \le \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\hat{\sigma}) = 1-\alpha$ Bootstrap-Methode: Schätze $\hat{p} = \frac{k}{n}$ aus n-fach wiederholtem Bernoulli-Experiment; schätze $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ „Robuste" Methode: Schätze $\hat{p} = \frac{k}{n}$ aus n-fach wiederholtem Bernoulli-Experiment; schätze $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{0{,}5(1-0{,}5)}{n}}$

Hypothesentests

Nullhypothese	Man testet stets, ob die Beobachtungen Anlass dazu geben, die Nullhypothese H_0 zu <u>verwerfen</u>. Z.B.: H_0=„Neues Medikament ist nicht besser als altes Medikament" oder H_0=„Kein neues Teilchen gefunden"
Alternativhyp.	Die Alternativhypothese H_1 beschreibt in der Regel die eigentlich interessierende Annahme, die sogenannte Arbeitshyp.
Teststatistik	Aus der Stichprobe wird die Teststatistik T berechnet. Abhängig von H_0 wird der kritische Bereich C von T bestimmt. Fällt der Wert von T in den Bereich C, wird H_0 verworfen, ansonsten vorläufig beibehalten.
Fehler 1. Art	H_0 wird verworfen, obwohl H_0 zutrifft. („Behaupte, neues Teilchen gefunden zu haben, obwohl falsch")
Fehler 2. Art	H_0 wird beibehalten, obwohl H_0 falsch ist. („Übersehe neues Elementarteilchen")
Signifikanzniveau	C so, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art gleich dem Signifikanzniveau α ist. $\alpha = W(T \in C \vert \vartheta \in H_0)$
Güte	Für eine Gegenhypothese H_1 kann die Wahrscheinlichkeit $\beta(H_1)$ für einen Fehler 2. Art bestimmt werden. $1-\beta(H_1)$ ist die Güte für H_1. Sie sollte nie kleiner als α sein, dann ist der Test unverzerrt. $1-\beta(H_1) = W(T \in C \vert \vartheta \in H_1)$
Tests für alternativverteilte Stichproben	
$H_0: p \le p_0$ $H_1: p > p_0$	$T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Bi}(n, p)$; H_0 ablehnen, wenn T „zu groß". $\Longrightarrow$ Ablehnung, wenn $\sum_{i=T}^{n} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} \le \alpha$ Bsp: Hersteller behauptet, dass nicht mehr als 2% eines Bauteils fehlerhaft sind. In einer Stichprobe n=300 sind 9 Stück defekt. Kann die Behauptung des Herstellers mit Signifikanzniveau 5% widerlegt werden? $\sum_{i=9}^{300} \binom{300}{i} 0.02^i (1-0.02)^{300-i} = 0.1507 > 0.05$ $\Longrightarrow$ Behauptung des Herstellers <u>nicht</u> widerlegt. Alternativ: Annäherung bei großen n durch $\mathrm{No}(np, np(1-p)) \Longrightarrow$ Ablehnung, wenn $\frac{T-np_0}{\sqrt{np(1-p_0)}} \ge z_{1-\alpha} \sim \mathrm{No}(0,1)$
$H_0: p \ge p_0$	Wie oben, bis auf: H_0 ablehnen, wenn T „zu klein". $\Longrightarrow$ Ablehnung, wenn $\frac{T-np_0}{\sqrt{np(1-p_0)}} \le z_\alpha \sim \mathrm{No}(0,1)$

Tests für poissonverteilte Stichproben	
$H_0: \lambda \leq \lambda_0$ $H_1: \lambda > \lambda_0$	$T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Po}(n\lambda)$; H_0 ablehnen, wenn T „zu groß“. $\Longrightarrow$ Ablehnung, wenn $T > P_{1-\alpha,n\lambda_0}$ Bsp: Fabrik will, dass täglich im Mittel nicht mehr als 25 defekte Bauteile hergestellt werden. Eine Stichprobe von 5 Tagen ergibt 28,34,32,38 und 22 defekte Bauteile (Summe 154). Wurde das Ziel erreicht? $T = 154; P_{0.99,5\cdot 25} = 152$ Hypothese mit Signifikanzniveau von 1% widerlegt. Alternativ: Annäherung bei großen n durch $\mathrm{No}(n\lambda, n\lambda) \Longrightarrow$ Ablehnung, wenn $\frac{T-n\lambda_0}{\sqrt{n\lambda_0}} \geq z_{1-\alpha} \sim \mathrm{No}(0,1)$
$H_0: \lambda \geq \lambda_0$	Wie oben, bis auf: H_0 ablehnen, wenn T „zu klein“. $\Longrightarrow$ Ablehnung, wenn $\frac{T-n\lambda_0}{\sqrt{n\lambda_0}} \leq z_\alpha \sim \mathrm{No}(0,1)$
Tests für exponentialverteilte Stichprobe	
$H_0: \tau = \tau_0$	$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} \sim \mathrm{Ga}\left(n, \frac{\tau_0}{n}\right)$; $C = [0, Q_{\alpha/2}] \cup [Q_{1-\alpha/2}, \infty]$ mit Q_p...Quantil von $\mathrm{Ga}\left(n, \frac{\tau_0}{n}\right) \Longrightarrow$ Ablehnung, wenn $T \in C$ Güte = $1 - \beta(\mu\tau) = \mathrm{W}(T \in C) = \mathrm{G}(Q_{\alpha/2}) + (1 - \mathrm{G}(Q_{1-\alpha/2}))$ mit G...Verteilungsfkt von Ga $n, \frac{\tau_0}{n}$. Nicht unverzerrt!
Tests für normalverteilte Stichproben	
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$ σ^2 bekannt	$T = \frac{(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{No}(0,1)$; $C =]-\infty, z_{\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}, \infty[$ mit z_p...Quantil von $\mathrm{No}(0,1) \Longrightarrow$ Ablehnung, wenn $\lvert T \rvert > z_{1-\alpha/2}$ Güte = $1 - \beta(\mu) = \mathrm{W}(T \in C) = \mathrm{G}(z_{\alpha/2}) + (1 - \mathrm{G}(z_{1-\alpha/2}))$ mit G...Verteilungsfkt von $\mathrm{No}\left(\frac{\sqrt{n}(\mu-\mu_0)}{\sigma}, 1\right)$. Unverzerrt.
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$ σ^2 bekannt	$T = \frac{(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{No}(0,1)$; $C = [z_{1-\alpha}, \infty[$ mit z_p...Quantil von $\mathrm{No}(0,1) \Longrightarrow$ Ablehnung, wenn $T > z_{1-\alpha}$. Güte = $1 - \beta(\mu) = \mathrm{W}(T \in C) = 1 - \mathrm{G}(z_{1-\alpha})$ mit G...Verteilungsfkt von $\mathrm{No}\left(\frac{\sqrt{n}(\mu-\mu_0)}{\sigma}, 1\right)$. Unverzerrt.
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$ σ^2 unbekannt	$T = \frac{(\bar{X}-\mu_0)}{S/\sqrt{n}} \sim \mathrm{T}(n-1)$; $C =]-\infty, t_{\alpha/2}^{n-1}] \cup [t_{1-\alpha/2}^{n-1}, \infty[$ mit t_p^{n-1}...Quantil von $\mathrm{T}(n-1) \Longrightarrow$ Ablehnung, wenn $\lvert T \rvert > t_{1-\alpha/2}^{n-1}$ Güte = $1 - \beta(\mu) = \mathrm{W}(T \in C) = \mathrm{G}(z_{\alpha/2}) + (1 - \mathrm{G}(z_{1-\alpha/2}))$ mit G...Verteilungsfkt von $\mathrm{T}\left(n - 1 \frac{\sqrt{n}(\mu-\mu_0)}{S}\right)$. Unverzerrt.
$H_0: \mu_x = \mu_y$ $H_1: \mu_x \neq \mu_y$ σ_x^2, σ_y^2 bekannt	$T = \bar{X} - \bar{Y} \sim \mathrm{No}\left(0, \frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}\right)$; $Z = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\sigma_x^2/n+\sigma_y^2/m}} \sim \mathrm{No}(0,1)$; $C =]-\infty, z_{\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}, \infty[\Longrightarrow$ Ablehnung, wenn $\lvert Z \rvert > z_{1-\alpha/2}$
$H_0: \mu_x = \mu_y$ $H_1: \mu_x \neq \mu_y$ $\sigma_x = \sigma_y$ unbek.	$S^2 = \frac{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}{n+m-2}$; $T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{S^2(1/n+1/m)}} \sim \mathrm{T}(n+m-2) \Longrightarrow$ Ablehnung, wenn $\lvert T \rvert > t_{1-\alpha/2}^{n+m-2}$
$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ μ, σ^2 unbekannt	$T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1) \Longrightarrow$ Ablehnung, wenn $T < \chi_{\alpha/2,n-1}^2$ oder $T > \chi_{1-\alpha/2,n-1}^2$ Güte = $1 - \beta(\mu) = \mathrm{G}\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi_{\alpha/2}^2\right) + \left(1 - \mathrm{G}\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\chi_{1-\alpha/2}^2\right)\right)$ mit G...Verteilungsfunktion von $\chi^2(n-1)$. Nicht unverzerrt!
$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ $H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$	$T = \frac{S_x^2}{S_y^2} \sim \mathrm{F}(n-1, m-1) \Longrightarrow$ Ablehnung, wenn $T < F_{\alpha/2}$ oder $T > F_{1-\alpha/2}$
$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$ σ^2 unbekannt	$T = \frac{(\bar{X}-\mu_0)}{S/\sqrt{n}} \sim \mathrm{T}(n-1)$; $C = [t_{1-\alpha}^{n-1}, \infty[$ mit t_p^{n-1}...Quantil von $\mathrm{T}(n-1) \Longrightarrow$ Ablehnung, wenn $T > t_{1-\alpha}^{n-1}$

χ^2-Test

Prüfe Hypothese H_0: Stichprobe entstammt konkreter Verteilung F_0 (Parameter bekannt).

- Beobachtungen gruppieren. Beobachtete Gruppenhäufigkeit $n_1, \ldots, n_k$. Erwartete Gruppenhäufigkeiten unter H_0: $np_1, \ldots, np_k$
- Keines der np_i sollte < 10 sein; nicht zu viele Gruppen (ca. 10)
- Testgröße: $T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi^2(k-1)$ für große n.
- Verwerfen, wenn $T > \chi_{1-\alpha,k-1}^2$

Prüfe Hypothese H_0: Stichprobe entstammt Verteilung F_0 (Parameter unbekannt).

- Beobachtungen gruppieren. Beobachtete Gruppenhäufigkeit $n_1, \ldots, n_k$. Erwartete Gruppenhäufigkeiten unter H_0: $np_1, \ldots, np_k$
- Keines der np_i sollte < 10 sein; nicht zu viele Gruppen (ca. 10)
- Schätze Parameter der angenommenen Verteilung aus Stichprobe (z.B. ML-Schätzer)
- Testgröße: $T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} \sim \chi^2(k-2)$ für große n.
- Verwerfen, wenn $T > \chi_{1-\alpha,k-m}^2$ mit m... Anzahl geschätzter Parameter

Kolmogorov-Smirnov-Test

Prüfe Hypothese H_0: Stichprobe entstammt konkreter Verteilung F_0 (Parameter bekannt).

- Testgröße: $D_n = \lvert \mathrm{F}_n(x) - \mathrm{F}_0(x) \rvert$ mit $\mathrm{F}_n(x)$...Verteilung in der Stichprobe, D_n maximale absolute Abweichung zwischen F_n und F_0
- H_0 wird abgelehnt, wenn $\sqrt{n}D_n > K_{1-\alpha}$ mit $\mathrm{K}(x) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}e^{-2k^2x^2}$