Merkzettel „Vektoren und Matrizen“ II

24.05.2024

Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Gerade Parameterdarst.	$g\colon \vec{X} = \overrightarrow{0A} + s\vec{a}$	Normalvektorform:	$g\colon \vec{n} \cdot \vec{X} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{0P}$	Normalvektor ablesen aus $ax + by = c \ \rightarrow \ \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	
Hessische Abstands-formel:	$\mathrm{d}(P, g) = \left\lvert \overrightarrow{A_g P} \cdot \vec{n}_0 \right\rvert = \frac{\left\lvert \overrightarrow{A_g P} \cdot \vec{n} \right\rvert}{\lvert \vec{n} \rvert}$	*Normalvektor ablesen aus Richtungsvektor* $\vec{a}$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \vec{n}_l = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix};\ \vec{n}_r = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$		Fläche Parallelogramm:	$A = \left\lvert \vec{a} \times \vec{b} \right\rvert$

Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Ebene in Parameterdarstellung:	$\varepsilon\colon \vec{X} = \overrightarrow{0A} + s\vec{a} + t\vec{b}$	Normalvektor $\vec{n}_\varepsilon$ ablesen aus $ax + by + cz = c \rightarrow \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, oder: $\vec{n}_\varepsilon = \vec{a} \times \vec{b}$	
Hessische Abstandsformel:	$\mathrm{d}(g, \varepsilon) = \left\lvert \overrightarrow{A_g P_\varepsilon} \cdot \vec{n}_0 \right\rvert = \frac{\lvert \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \rvert}{\lvert \vec{n} \rvert}$	Winkel $\vec{a}, \varepsilon$:	$\varphi = 90° - \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert \vec{a} \rvert \cdot \lvert \vec{b} \rvert} = 90° - \arccos\left(\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0\right)$
Kreuzprodukt („äuß. Prod.“)	$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -(a_x b_z - a_z b_x) \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$	$\left\lvert \vec{a} \times \vec{b} \right\rvert = \lvert \vec{a} \rvert \cdot \left\lvert \vec{b} \right\rvert \cdot \sin \alpha$; *wenn* $\left\lvert \vec{a} \times \vec{b} \right\rvert = 0$, *dann sind* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *parallel*	
Schneide Ebene/Gerade	$\varepsilon = g \Rightarrow \overrightarrow{0A}_\varepsilon + s\vec{a}_\varepsilon + t\vec{b}_\varepsilon = \overrightarrow{0A}_g + s\vec{a}_g \Rightarrow$ GLS lösen	$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$	$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2 = a^2 b^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2$
Spatprodukt:	Volumen Parallelepiped aufgespannt von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$: $V = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$		

Vektorrechnung in $\mathbb{R}^n$ allgemein

Skalarprodukt („kanon. inn. Produkt“)	$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \vec{x}^T \mathbb{1} \vec{y}$; $(\vec{x} \cdot \vec{y})_i = x_i y_i = \delta_{ij} x_i x_j$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lVert \vec{a} \rVert \cdot \left\lVert \vec{b} \right\rVert \cdot \cos \alpha$; *wenn* $\left\lvert \vec{a} \cdot \vec{b} \right\rvert = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$	*Linearität*: $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$; $(s\vec{x}) \cdot \vec{y} = s(\vec{x} \cdot \vec{y})$; *Symetrie*: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$; *positive Definitheit*: $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$; $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$		
Euklid. Norm („Länge“):	$\left\lvert \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \right\rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$	Winkel $\vec{x}, \vec{y}$:	$\varphi = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\lVert \vec{x} \rVert \cdot \lVert \vec{y} \rVert} = \arccos(\vec{x}_0 . \vec{y}_0)$	p-Norm:	$\lVert \vec{x} \rVert_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \lvert x_i \rvert^p}$
				1er-Norm:	$\lVert \vec{x} \rVert_1 = \sum_{i=1}^n \lvert x_i \rvert$
Skalare Pro-jektion a→ b:	$\lVert \vec{a}_{\vec{b}} \rVert = \vec{a} \cdot \vec{b}_0 = \vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{\lVert b \rVert}$	Vektorprojektion a→ b = $\vec{a}_{\vec{b}}$	$\vec{a}_{\vec{b}} = \lVert \vec{a}_{\vec{b}} \rVert \vec{b}_0 = \left(\vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{\lVert b \rVert}\right) \frac{\vec{b}}{\lVert b \rVert} = \left(\vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{\lVert b \rVert^2}\right) \vec{b}$	Reflexion v. $\vec{u}$ an Ebene $\vec{n}$	$\vec{u}_a = \vec{u} - 2\vec{u}_{\vec{n}}$
Sonstiges:	$\lVert s\vec{v} \rVert = s \lVert \vec{v} \rVert$; *Einheitsvektor* $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{\lVert a \rVert}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A}$; *Halbierungspunkt* $H = \frac{A-B}{2}$; *Gerade*: $\vec{X} = \overrightarrow{0A} + t \cdot \vec{a}$				

Vektoren in allgemeinen linearen Vektorräumen

Def.: Linearer Vektorraum:	$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$; $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$; $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$; $(st)\vec{v} = s(t\vec{v})$; $(s + t)\vec{v} = s\vec{v} + t\vec{v}$; $s(\vec{u} + \vec{v}) = s\vec{u} + s\vec{v}$; $1\vec{v} = \vec{v}$						
Euklid. Vektor-raum (V,⟨·,·⟩):	Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit def-iniertem Innerem Produkt:	*Linearität*: $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$; $\langle s\vec{u}, \vec{v} \rangle = s\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$; *Symetrie*: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$; *pos. Definitheit*; $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$; $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$					
Norm. Vektor-raum (V, ‖ · ‖):	Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit definierter Norm	$V \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \colon \vec{x} \rightarrow \lVert \vec{x} \rVert$: $(\lVert s\vec{x} \rVert = \lvert s \rvert \lVert \vec{x} \rVert) \land (\lVert \vec{x} + \vec{y} \rVert \leq \lVert \vec{x} \rVert + \lVert \vec{y} \rVert) \land \left(\lVert \vec{x} \rVert \geq 0;\ \lVert \vec{x} \rVert = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}\right)$					
Euklidische Norm (Länge):	$\lVert \vec{x} \rVert_2 = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$	Abstand:	$\mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y}) = \lVert \vec{x} - \vec{y} \rVert_2$	Winkel:	$\varphi = \arccos \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\lVert \vec{x} \rVert_2 \lVert \vec{y} \rVert_2}$	Cauchy-Schwarz:	$\lvert \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \rvert \leq \lVert \vec{x} \rVert_2 \lVert \vec{y} \rVert_2$
Dreiecksungl.:	$\vec{u}, \vec{v} \in V, (\mathrm{V}, \lVert \cdot \rVert)$: $\lVert \vec{u} + \vec{v} \rVert \leq \lVert \vec{u} \rVert + \lVert \vec{v} \rVert$; $\lvert \lVert \vec{u} \rVert - \lVert \vec{v} \rVert \rvert \leq \lVert \vec{u} - \vec{v} \rVert$	Pythagoras:	$\vec{x} \perp \vec{y}$: $\lVert \vec{x} + \vec{y} \rVert_2^2 = \lVert \vec{x} \rVert_2^2 + \lVert \vec{y} \rVert_2^2$				
Lin. unabhängig	$s_1 \vec{v}_1 + s_2 \vec{v}_2 + \cdots + s_k \vec{v}_k = \vec{0} \Longrightarrow$ *wenn w. A. nur mit allen* $s_k = 0$, *dann ist* $\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_k$ *l. u.* $(\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_k \neq \vec{0})$						
Unterraum	$(U \subseteq V) \land (\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in U \Longrightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in U) \land (\vec{v} \in U \Longrightarrow s\vec{v} \in U)$	$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$					
Direkte Summe	$V = U \oplus W \Leftrightarrow (V = U + W) \land \left(U \cap W = \{\vec{0}\}\right)$						
Gram-Schmidt	*Geg.*: $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$; $\vec{w}_1 = \vec{b}_1$; $\vec{w}_2 = s_{21} \vec{w}_1 + \vec{b}_2$; $\vec{w}_3 = s_{31} \vec{w}_1 + s_{32} \vec{w}_2 + \vec{b}_3$; $s_{ij} = -\frac{\langle b_i, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle}$; $\vec{c}_i = \frac{\vec{w}_i}{\lVert \vec{w}_i \rVert}$						
Orthogonalbas.:	*B ist OGB, wenn* $\langle b_i, b_j \rangle = 0 \colon \forall i \neq j$	Orthonormalbasis:	*B ist ONB, wenn* $\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$	In ONB: $\langle \vec{x}, \vec{b}_i \rangle = x_i$			

Gleichungssysteme

$A\vec{x}=\vec{b}$ lösbar:	$\mathrm{Rang}(A\mid\vec{b})=\mathrm{Rang}(A) \Leftrightarrow \vec{b}\in\mathrm{Bild}(A) \Leftrightarrow \vec{b}\cdot\vec{z}=0\colon \forall\vec{z}\in\mathrm{Kern}(A^T)$	∄Lsg.:	$\mathrm{Rang}(A\mid\vec{b})\neq\mathrm{Rang}(A)$
$A\vec{x}=\vec{b}$; ∃1Lsg.:	$\mathrm{Rang}(A\mid\vec{b})=\mathrm{Rang}(A)=n \Leftrightarrow \det(A)\neq 0$	∃∞Lsg.:	$\det(A)\neq 0 \wedge \mathrm{Rang}(A\mid\vec{b})=\mathrm{Rang}(A)$

Lösen von 3x3 Gleichungssystemen mit der Cramer-Regel:

$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ $a_3x+b_3y+c_3z=d_3$	$D=\det\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$	$D_x=\det\begin{vmatrix}d_1&b_1&c_1\\d_2&b_2&c_2\\d_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$	$D_y=\det\begin{vmatrix}a_1&d_1&c_1\\a_2&d_2&c_2\\a_3&d_3&c_3\end{vmatrix}$	$D_z=\det\begin{vmatrix}a_1&b_1&d_1\\a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\end{vmatrix}$	$x=\frac{D_x}{D}$ $y=\frac{D_y}{D}$ $z=\frac{D_z}{D}$

Differenzialgleichungssysteme

$\dot{\vec{x}}(t)=\boldsymbol{A}\,\vec{x}(t)+\vec{f}(t)$	EW: $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0$		EV: $\vec{v}_{1\ldots n}\in\mathrm{Eigenraum}(\lambda_i)=\mathrm{Kern}(A-\lambda_i I)$		Wenn n<g, HV: $(A-\lambda_i I)\vec{h}=\vec{v}_i$	
Homogene Lösung:	Für jeden EV zu $\lambda_i\in\mathbb{R}$: $\vec{y}_h=c_ie^{\lambda_i t}\vec{v}_i$		Für jeden 1. HV zu $\lambda_i\in\mathbb{R}$:	$\vec{y}_h=c_ie^{\lambda_i t}(\vec{h}+t\vec{v}_i)$		
	Für jeden EV $\vec{v}_{ij}=\vec{a}\pm i\vec{b}$ zu $\lambda_{ij}=\alpha\pm i\beta$:	$\vec{y}_h=c_ie^{\alpha t}(\vec{a}\cos\beta t-\vec{b}\sin\beta t)+c_je^{\alpha t}(\vec{b}\cos\beta t+\vec{a}\sin\beta t)$				
Partikuläre Lösung	$\vec{f}(t)=\vec{a}\,{\sin\atop\cos}\,\omega t$:	$\vec{y}_p=\vec{a}\sin\omega t+\vec{b}\cos\omega t$	$\vec{f}(t)=\vec{\alpha}+\vec{\beta}t+\vec{\gamma}t^2+\cdots$	$\vec{y}_p=\vec{a}+\vec{b}t+\vec{c}t^2+\cdots$	$\vec{f}(t)=\vec{\alpha}e^{\omega t}$	$\vec{y}_p=\vec{a}e^{\omega t}$
$\boldsymbol{B}\,\ddot{\vec{y}}(t)+\boldsymbol{C}\,\vec{y}(t)=\vec{k}(t)$	$p(\lambda)=\det(C-\lambda B)=0$		$\vec{q}_{1\ldots n}\in\mathrm{Kern}(C-\lambda_iB)$	$\mu_{1\ldots n}=\sqrt{\lambda_{1\ldots n}}$		
Hom. Lsg.:	Für jedes $\vec{q}_i$ zu $\lambda_i\in\mathbb{R}$:	$\vec{y}_h=\vec{q}_i(\alpha_i\cos\mu t+\beta_i\sin\mu t)$				
Partikuläre Lösung:	$\vec{k}(t)=\vec{\alpha}\sin\omega t\,;\ \omega\neq\mu_i$	$\vec{y}_p=\vec{a}\sin\omega t$	$\vec{k}(t)=\vec{\alpha}\sin\omega t\,;\ \omega=\mu_i$	$\vec{y}_p=\vec{a}t\sin\omega t$		
	$\vec{k}(t)=\vec{\alpha}\cos\omega t\,;\ \omega\neq\mu_i$	$\vec{y}_p=\vec{a}\cos\omega t$	$\vec{k}(t)=\vec{\alpha}\cos\omega t\,;\ \omega=\mu_i$	$\vec{y}_p=\vec{a}t\cos\omega t$	$\vec{k}(t)=\vec{\alpha}e^{\omega t}$:	$\vec{y}_p=\vec{a}e^{\omega t}$

Nabla-Operator

Nabla Operator:	$\vec{\nabla}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix};\ (\vec{\nabla})_i$	Gradient von $f(\vec{r})$ (skalar)	$\mathrm{grad}(f(\vec{r}))=\vec{\nabla}f(\vec{r})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x}\\\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y}\\\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z}\end{pmatrix}$	Gradient von $\vec{v}$ (vektoriell)	$\mathrm{grad}(\vec{v})=\vec{\nabla}\otimes\vec{v}=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_x}{\partial x}&\frac{\partial v_y}{\partial x}&\frac{\partial v_z}{\partial x}\\\frac{\partial v_x}{\partial y}&\frac{\partial v_y}{\partial y}&\frac{\partial v_z}{\partial y}\\\frac{\partial v_x}{\partial z}&\frac{\partial v_y}{\partial z}&\frac{\partial v_z}{\partial z}\end{pmatrix}$
Divergenz von $\vec{v}(\vec{r})$: (wenn 0 ⇒ quellenfrei)	$\mathrm{div}\begin{pmatrix}v_x(\vec{r})\\v_y(\vec{r})\\v_z(\vec{r})\end{pmatrix}=\vec{\nabla}\cdot\begin{pmatrix}v_x(\vec{r})\\v_y(\vec{r})\\v_z(\vec{r})\end{pmatrix}=\frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial x}+\frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial y}+\frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial z}$				
Rotation von $\vec{v}(\vec{r})$:	$\mathrm{rot}\begin{pmatrix}v_x(\vec{r})\\v_y(\vec{r})\\v_z(\vec{r})\end{pmatrix}=\vec{\nabla}\times\begin{pmatrix}v_x(\vec{r})\\v_y(\vec{r})\\v_z(\vec{r})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial y}-\frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial z}\\\frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial z}-\frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial x}\\\frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial x}-\frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial y}\end{pmatrix}$	Wenn 0: wirbelfrei ⇒ ∃ Potential $\nabla\phi=\vec{v}(\vec{r})$			
Laplace-Operator von $f(\vec{r})$ (skalar)	$\vec{\Delta}f(\vec{r})=\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f(\vec{r})))$ $\vec{\Delta}f(\vec{r})=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}f(\vec{r}))$ $\vec{\Delta}f(\vec{r})=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	Laplace-Operator vektoriell	$\vec{\Delta}\begin{pmatrix}v_x(\vec{r})\\v_y(\vec{r})\\v_z(\vec{r})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{\Delta}v_x(\vec{r})\\\vec{\Delta}v_y(\vec{r})\\\vec{\Delta}v_z(\vec{r})\end{pmatrix}$		

Rechenregeln:

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}f) = 0$ ("Gradientenfeld ist wirbelfrei")
$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = 0$ ("Feld der Rotation ist quellenfrei")
$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}f) = \vec{\Delta}f$
$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{v}) = (\vec{\nabla}f)\cdot\vec{v}+f(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$
$\vec{\nabla}\times(f\vec{v}) = (\vec{\nabla}f)\times\vec{v}+f(\vec{\nabla}\times\vec{v})$
$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})-\vec{\Delta}\vec{v}$
$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{\nabla}g) = (\vec{\nabla}f)\cdot(\vec{\nabla}g)+\vec{\Delta}g$
$\vec{\nabla}(fg) = f(\vec{\nabla}g)+g(\vec{\nabla}f)$
$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{v}) = f(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})+\vec{v}(\vec{\nabla}f)$

Matrixmultiplikation

Produkt $A\cdot\vec{x}$ (Matrix mal Vektor) $(Drehstreckung\ von\ \vec{x})$	*Bedingung: Spalten Matrix= Elemente Vektor* $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix}$
Produkt $A\cdot B$ (Matrix mal Matrix) (i. A.: $A\cdot B \neq B\cdot A$)	*Bedingung: Spalten A= Zeilen B* $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$

Allgemeine $m_x n$-Matritzen bzw. Abbildungen (m…Zeilen, n…Spalten)

Linear unab.	Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_k$ sind LU, wenn die Gleichung $s_1\vec{v}_1 + s_2\vec{v}_2 + s_k\vec{v}_k = 0$ nur erfüllt werden kann, wenn alle $s_i = 0$			
Linear abh.	Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_k$ sind LA, wenn die Gleichung $s_1\vec{v}_1 + s_2\vec{v}_2 + s_k\vec{v}_k = 0$ erfüllt werden kann für irgendein $s_i \neq 0$			
Rang(A)= dim(Bild(A))	$\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow{Gauss} \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} : Rang = \#Zeilen \neq 0$	Rang = # linear unabhängiger Zeilenvektoren = # linear unabhängiger Spaltenvektoren		
Basis(Bild(A))	$\begin{bmatrix} \vert & \vert & \vert \\ [\vec{a}_1] & [\vec{a}_2] & [\vec{a}_3] \\ \vert & \vert & \vert \end{bmatrix} \xrightarrow{Gauss} \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Basis(B(A)) = \mathcal{L}(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$			
Basis(Kern(A))	$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} \xrightarrow{Gauss} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{ergänzen} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X \end{bmatrix} \Rightarrow Basis(K(A)) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -a \\ -c \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ -d \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$	*Kern:* $\forall \vec{x}: A\vec{x} = \vec{0}$		
$[\vec{v}]_E \to [\vec{v}]_B$	$[B \mid [\vec{v}]_E] \xrightarrow{Gauss} [\mathbb{1} \mid [\vec{v}]_B];\ oder: [\vec{v}]_B = T_{B\leftarrow E}[\vec{v}]_E = B^{-1}[\vec{v}]_E$	$[\vec{v}]_B \to [\vec{v}]_E$:	$[\vec{v}]_E = T_{E\leftarrow B}[\vec{v}]_B = B[\vec{v}]_B$	
$[\varphi(E)]_E \to [\varphi(E)]_B$	$[B \mid [\varphi(E)]_E] \xrightarrow{Gauss} [\mathbb{1} \mid [\varphi(E)]_B];\ \ oder: [\varphi(E)]_B = T_{B\leftarrow E}\ [\varphi(E)]_E\ = B^{-1}[\varphi(E)]_E$			
$[\varphi(E)]_E \to [\varphi(B)]_B$	$\left[\begin{matrix} \vert & \vert & \vert \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots \\ \vert & \vert & \vert \end{matrix} \middle\vert \begin{matrix} \vert & \vert & \vert \\ [\varphi(\vec{b}_1)]_E & [\varphi(\vec{b}_2)]_E & \cdots \\ \vert & \vert & \vert \end{matrix}\right] \xrightarrow{Gauss} [\mathbb{1} \mid [\varphi(B)]_B];\ \ oder: [\varphi(B)]_B = T_{B\leftarrow E}\ [\varphi(E)]_E\ T_{E\leftarrow B}\ = B^{-1}[\varphi(E)]_E\ B$			
$[\varphi(B)]_E \to [\varphi([\vec{x}]_E)]_B$	$[\varphi([\vec{x}]_E)]_B = T_{B\leftarrow E}\,[\varphi(B)]_E\ T_{B\leftarrow E}\ [\vec{x}]_E = B^{-1}\ [\varphi(B)]_E\ B^{-1}\ [\vec{x}]_E$			
$[\varphi(B)]_B \to [\varphi(C)]_C$	$[\varphi(C)]_C = T_{C\leftarrow B}\ [\varphi(B)]_B\ T_{B\leftarrow C} = \begin{bmatrix} \vert & \vert & \vert \\ [\vec{b}_1]_C & [\vec{b}_2]_C & \cdots \\ \vert & \vert & \vert \end{bmatrix} [\varphi(B)]_B \begin{bmatrix} \vert & \vert & \vert \\ [\vec{c}_1]_B & [\vec{c}_2]_B & \cdots \\ \vert & \vert & \vert \end{bmatrix}$			
$U = \mathcal{L}\{\vec{u}, \vec{v}\} \to$ Basis$(U^{\perp})$	$z.B.\ U \in \mathbb{R}^3$: $\text{Basis}(U^{\perp}) = \text{Basis}\left(\text{Kern}\left(\begin{bmatrix} - & \vec{u}^T & - \\ - & \vec{v}^T & - \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right)$q			
Natürliche Matrixnorm	$\Vert A\Vert_\rho = \max\limits_{\vec{x}\neq\vec{0}} \left(\frac{\Vert A\vec{x}\Vert_\rho}{\Vert\vec{x}\Vert_\rho}\right) = \max\limits_{\Vert\vec{x}\Vert_\rho=1} (\Vert A\vec{x}\Vert)$	1-Norm:	$\Vert A\Vert_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} \vert a_{ij}\vert$	(größte Spalten-betragssumme)
Spektralnorm	$\Vert A\Vert_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$	Maximum-Norm:	$\Vert A\Vert_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} \vert a_{ij}\vert$	(größte Zeilen-betragssumme)
Zerlegung:	Sei $A \in \mathbb{C}^n$. Zerlegung: $A = B + iC; B = \frac{1}{2}(A + A^{\dagger}); C = \frac{1}{2i}(A - A^{\dagger})$			

Quadratische $n_x n$-Matrizen

Determinante:	$\det\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$	$\det\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - c_2 b_3 a_1 - c_3 b_1 a_2 = a_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$		
Rechenregeln:	$\det(AB) = \det(A)\det(B)$	$\det(A^T) = \det(A)$	$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$	$\det(sA) = s^n \det(A)$
	$A^{p+q} = A^p \cdot A^q$	$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	$(A+B)^T = A^T + B^T$	
regulär:	$\mathrm{Rang}(A) = n \Leftrightarrow Kern(A) = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}\ hat\ nur\ Lsg.\ \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \det\lvert A\rvert \neq 0 \Leftrightarrow \forall\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \exists: A^{-1}$	singulär $\Leftrightarrow$ ¬regulär		
transponiert:	$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$ (Zeilen und Spalten vertauschen)			
idempotent:	$AA = A$. „A ist idempotent“ $\Leftrightarrow$ „A ist ein Projektor“			
adjungiert:	in $\mathbb{R}^{nxn}$: adjungiert≡transponiert ≡ A^T	in $\mathbb{C}^{nxn}$: adjungiert≡transponiert&konjugiert ≡ $A^\dagger = (A^T)^* = (A^*)^T$; $(A^\dagger)_{ij} = \overline{(A)_{ji}}$		
selbstadjung.	in $\mathbb{R}^{nxn}$: selbstadjungiert≡symetrisch (s.u.) $\langle A\vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, A\vec{y}\rangle$	in $\mathbb{C}^{nxn}$: selbstadjungiert≡hermit (s.u.) $\langle A\vec{x} \mid \vec{y}\rangle = \langle \vec{x} \mid A\vec{y}\rangle$		
positiv:	$A \geq 0, wenn\ \forall\vec{x} \in V: \langle A\vec{x} \mid \vec{x}\rangle \geq 0.$	Streng positiv:	$A > 0, wenn\ \forall\vec{x} \in V: \langle A\vec{x} \mid \vec{x}\rangle > 0.$	
symetrisch:	$A = A^T \Leftrightarrow EV\ bilden\ OGB\ D \Leftrightarrow \exists: OGB\ D: V^T A\, V = D$	symetrisch $\Longrightarrow \forall\lambda_i \in \mathbb{R}.$; symetrisch $\Longrightarrow$ diagonalisierbar		
hermit:	$A = A^\dagger = A^* \Leftrightarrow EV\ bilden\ OGB\ D \Leftrightarrow \exists: OGB\ D: U^\dagger A\, U = D$	herm.$\Longrightarrow \forall\lambda_i \in \mathbb{R}$; h.$\Longrightarrow$diag.bar; h.$\Longrightarrow$selbstadj.; h.$\Longrightarrow$ normal		
diag.sierbar:	$\exists T: T\, A\, T^{-1} = D \Leftrightarrow \exists\ Eigenbasis\ D: A = X\, D\, X^{-1} \forall\lambda_i: algebr.Vielfachheit\ n = geom.Vielfachheit\ g \Leftrightarrow AB = BA$			
invertierbar:	$\exists B: AB = \mathbb{1} \Leftrightarrow regulär$	Invertieren:	$[A\mid\mathbb{1}] \xrightarrow{Gauss} [\mathbb{1}\mid A^{-1}]$	Invertieren 2x2: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
normal:	A ist normal, wenn $[AA^*] = AA^* - A^*A = \mathbb{0}$.			
orthogonal:	$A \in \mathbb{R}^{nxn}: A^T = A^{-1} \Leftrightarrow A\, A^T = \mathbb{1} \Leftrightarrow \Vert\vec{x}\Vert = \Vert A\vec{x}\Vert$	orthogonal $\Longrightarrow \det(A) = \pm 1$; orthognal $\Longrightarrow \forall\lambda_i = \pm 1$		
unitär:	$A \in \mathbb{C}^{nxn}: U^\dagger = U^{-1} \Leftrightarrow U\, U^\dagger = \mathbb{1} \Leftrightarrow \Vert\vec{x}\Vert = \Vert U\vec{x}\Vert$	unitär $\Longrightarrow \det(U) = 1$; unit. $\Longrightarrow \forall\lambda_i = e^{it_i}$, unit. $\Longrightarrow$ diag.bar; unit. $\Longrightarrow$ normal		
Spur:	$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{ii}$ (Summe Hauptdiagonalelemente). Bei $ONB = \{\lvert e_1\rangle, \dots, \lvert e_i\rangle\}$: $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \langle e_i \mid Ae_i\rangle$			
definit:	$\mathrm{q}(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$. Wenn $\mathrm{q}(\vec{x}) > (\geq)\ 0\ \forall\vec{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\} \Longrightarrow$ positiv (semi)definit. Wenn $\mathrm{q}(\vec{x}) < (\leq)\ 0 \Longrightarrow$ negativ (semi)definit.			
Hauptminorenkriterium:	$\det(M_k) > 0, k = 1 \dots n \Longrightarrow pos.definit.;\ \ \mathrm{sgn}(\det(M_k)) = (-1)^k, k = 1 \dots n \Longrightarrow neg.definit$			
EW λ, EV $\vec{v}$	$A\vec{v} = \lambda\vec{v};\ Eigenvektor\ \vec{v} \in \mathbb{C}^n \backslash \{\vec{0}\}; Eigenwert\ \lambda \in \mathbb{C}. Wenn\ A \in \mathbb{R}^{nxn} \wedge pos.definit \Longrightarrow \forall\lambda_i \in \mathbb{R} \wedge \forall\lambda_i > 0.$			
EW und EV	EW: $\mathrm{p}(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$; EV: $\vec{v}_{1\dots n} \in \mathrm{Eigenraum}(\lambda_i) = \mathrm{Kern}(A - \lambda_i\mathbb{1})$			
Jordan:	$A = X\, J\, X^{-1};\ \ z.B: \lambda_1: n = 2; g = 1:\ J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix};\ X = \begin{bmatrix} \vert & \vert & \vert \\ \vec{v}_1 & \vec{h}_1 & \vec{v}_2 \\ \vert & \vert & \vert \end{bmatrix}$			

Definitionen

Norm. Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$:	Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit definierter Norm: $V \to \mathbb{R}_0^+ : \vec{x} \to \|\vec{x}\|: (\|s\vec{x}\| = \|s\|\|\vec{x}\|) \wedge (\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|) \wedge \left(\|\vec{x}\| \geq 0;\ \|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}\right)$
Funktional f	Sei V ein Vektorraum über den Körper $\mathbb{K}$. V kann auch ein Funktionenraum sein. Ein Funktional $f: V \to \mathbb{K}$ nimmt einen Vektor aus V als Input, und liefert einen Skalar $\in \mathbb{K}$ als Output
Lineares Funktional (LF)	f ist ein *Lineares Funktional* (LF) auf V, wenn: $f: V \to \mathbb{K}$: $\mathrm{f}(\lambda x + \mu y) = \lambda\, \mathrm{f}(x) + \mu\, \mathrm{f}(y)\ \forall x, y \in V;\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
Beschränktes LF	Ein LF auf dem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt *beschränkt,* wenn $\exists K > 0$: $\|\mathrm{f}(x)\| \leq K\|x\|\ \forall x \in V$
Operator F	Sei V ein Funktionenraum. Ein Operator $F: V \to U$ ist eine Abbildung zwischen den Funktionenräumen V und U
Linearer Operator (LO)	Seien$(V, \|\cdot\|_V)$ und $(U, \|\cdot\|_U)$ normierte (Funktionen)räume über $\mathbb{K}$. F ist ein *Linear Operator* (LO) auf V, wenn: $F: V \to U$: $\mathrm{F}(\lambda x + \mu y) = \lambda F + \mu\, \mathrm{F}(y)\ \forall x, y \in V;\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
Beschränkter LO	Ein LO $F: V \to U$ heißt *beschränkt,* wenn $\exists K > 0$: $\|\mathrm{F}(x)\|_U \leq K\|x\|_V\ \forall x \in V$
Prähilbertraum	Ein Vektorraum, in dem ein inneres Produkt definiert ist $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, heißt *Prähilbertraum*. Damit es ein inneres Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ geben kann, muss im Raum die Norm $\|\cdot\|_2$ definiert sein, bzw. das Innere Produkt *induziert* die Norm: $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}\ \ \forall x \in V$. Für $\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ spricht man auch von einem *euklidischen Raum*, für $\mathbb{K}$=$\mathbb{C}$ von einem *unitären Raum*. In einem Prähilbertraum ist *„Orthogonalität“* x⊥y definiert ($x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$), und es existieren *Orthonormalbasen*.
Inneres Produkt	Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Das innere Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle: V \times V \to \mathbb{K}$ muss folgende Eigenschaften haben: - Linearität im ersten Argument: $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle\ \ \forall x, y, z \in V;\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ (für $\langle x, y\rangle = \sum \bar{x}_i y_i$) - Hermite-Eigenschaft: $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}\ \ \ \forall x, y \in V$ - Definitheit: $\langle x, x\rangle \geq 0\ \forall x \in V\ \wedge\ \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Aus Linearität im ersten Argument und Hermite-Eigenschaft folgt konjugierte Linearität im zweiten Argument: $\langle z, \lambda x + \mu y\rangle = \bar{\lambda}\langle z, x\rangle + \bar{\mu}\langle z, y\rangle\ \ \forall x, y, z \in V;\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
Hilbertraum	Ein vollständiger Prähilbertraum $(\bar{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt Hilbertraum H. Für alle $x, y \in H$ gibt es Folgen $(x_n), (y_n)$, die gegen x bzw. y konvergieren. $\Rightarrow \boldsymbol{\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle}$.