Merkzettel „Vektoren, Matrizen, Tensoren“ III

05.11.2024

Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Gerade Parameterdarst.	$g: \vec{X} = \overrightarrow{0A} + s\vec{a}$	Normalvektorform:	$g: \vec{n} \cdot \vec{X} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{0P}$	Normalvektor ablesen aus $ax + by = c \rightarrow \vec{n} = \binom{a}{b}$		
Normalvektor auf Kurve der Fkt. $f(x) = y$ an Stelle $f(x_0) = y_0$	Bringe auf Form $f_{impl}(x, y) = 0 \Longrightarrow \vec{n} = \vec{\nabla} f_{impl}(x_0, y_0)$	Tangential vektor:	$\vec{t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{impl}(x_0,y_0)}{\partial y} \\ -\frac{\partial f_{impl}(x_0,y_0)}{\partial x} \end{pmatrix}$			
Hessische Abstands-formel:	$d(P, g) = \lvert\overrightarrow{A_gP} \cdot \vec{n}_0\rvert = \frac{\lvert\overrightarrow{A_gP} \cdot \vec{n}\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert}$	*Normalvektor ablesen aus Richtungsvektor* $\vec{a}$: $\vec{a} = \binom{x}{y} \rightarrow \vec{n}_l = \binom{-y}{x};\ \vec{n}_r = \binom{y}{-x}$	Fläche Parallelogramm:	$A = \lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert$		

Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Ebene in Parameterdarstellung:	$\varepsilon: \vec{X} = \overrightarrow{0A} + s\vec{a} + t\vec{b}$	Normalvektor $\vec{n}_\varepsilon = \vec{a} \times \vec{b}$, oder ablesen aus $ax + by + cz = c \rightarrow \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$	
Normalvektor auf Niveaufläche der Fkt. $f(x, y) = z$ an Stelle $f(x_0, y_0) = z_0$	Bringe auf Form $f_{impl}(x, y, z) = c \Longrightarrow \vec{n} = \vec{\nabla} f_{impl}(x_0, y_0, z_0)$		
Tangentialebene auf Niveaufläche der Fkt. $f(x, y) = z$ an Stelle $f(x_0, y_0) = z_0$	Bringe auf Form $f_{impl}(x, y, z) = c \Longrightarrow \varepsilon_{tan}: f_{impl}(x_0, y_0, z_0) + \vec{\nabla} f_{impl}(x_0, y_0, z_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$		
Hessische Abstandsformel:	$d(g, \varepsilon) = \lvert\overrightarrow{A_gP_\varepsilon} \cdot \vec{n}_0\rvert = \frac{\lvert\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert}$	Winkel $\vec{a}, \varepsilon$:	$\varphi = 90° - \arccos\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert} = 90° - \arccos(\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0)$
Kreuzprodukt („äuß. Prod.“)	$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_yb_z - a_zb_y \\ -(a_xb_z - a_zb_x) \\ a_xb_y - a_yb_x \end{pmatrix};\ (\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk}a_jb_k$	$\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \sin\alpha$; *wenn* $\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert = 0$, *dann sind* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *parallel* $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a};\ \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$	
Schneide Ebene/Gerade	$\varepsilon = g \Rightarrow \overrightarrow{0A}_\varepsilon + s\vec{a}_\varepsilon + t\vec{b}_\varepsilon = \overrightarrow{0A}_g + s\vec{a}_g \Rightarrow$ GLS lösen	$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$	$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$
Spatprodukt:	Volumen Parallelepiped aufgespannt von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$: $V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$		

Vektorrechnung in $\mathbb{R}^n$ allgemein

Skalarprodukt („kanon. inn. Produkt“)	$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_iy_i = \vec{x}^T\, \mathbb{1}\, \vec{y}$ $(\vec{x} \cdot \vec{y})_i = x_iy_i = \delta_{ij}x_ix_j$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lVert\vec{a}\rVert\, \lVert\vec{b}\rVert \cos\alpha$ *wenn* $\lvert\vec{a} \cdot \vec{b}\rvert = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$	*Linearität*: $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z};\ (s\vec{x}) \cdot \vec{y} = s(\vec{x} \cdot \vec{y})$; *Symetrie*: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$; *positive Definitheit*: $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0;\ \vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$		
Euklid. Norm („Länge“):	$\left\lvert\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$	Winkel $\vec{x}, \vec{y}$:	$\varphi = \arccos\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\lVert\vec{x}\rVert \cdot \lVert\vec{y}\rVert} = \arccos(\vec{x}_0.\vec{y}_0)$	p-Norm: 1er-Norm:	$\lVert\vec{x}\rVert_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \lvert x_i\rvert^p}$ $\lVert\vec{x}\rVert_1 = \sum_{i=1}^n \lvert x_i\rvert$
Skalare Projektion a→ b:	$\lVert\vec{a}_{\vec{b}}\rVert = \vec{a} \cdot \vec{b}_0 = \vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{\lVert b\rVert}$	Vektorprojektion a→ b = $\vec{a}_{\vec{b}}$	$\vec{a}_{\vec{b}} = \lVert\vec{a}_{\vec{b}}\rVert\vec{b}_0 = \left(\vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{\lVert b\rVert}\right)\frac{\vec{b}}{\lVert b\rVert} = \left(\vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{\lVert b\rVert^2}\right)\vec{b}$	Reflexion v. $\vec{u}$ an Ebene $\vec{n}$	$\vec{u}_a = \vec{u} - 2\vec{u}_{\vec{n}}$
Sonstiges:	$\lVert s\vec{v}\rVert = s\lVert\vec{v}\rVert$; *Einheitsvektor* $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{\lVert a\rVert}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A}$; *Halbierungspunkt* $H = \frac{A-B}{2}$; *Gerade*: $\vec{X} = \overrightarrow{0A} + t \cdot \vec{a}$				

Vektoren in allgemeinen linearen Vektorräumen

Def.: Linearer Vektorraum:	$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u};\ (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w});\ \vec{u} + \vec{0} = \vec{u};\ \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$; $(st)\vec{v} = s(t\vec{v});\ (s + t)\vec{v} = s\vec{v} + t\vec{v};\ s(\vec{u} + \vec{v}) = s\vec{u} + s\vec{v}; 1\vec{v} = \vec{v}$					
Euklid. Vektor-raum (V,⟨·,·⟩):	Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit def-iniertem Innerem Produkt:	*Linearität*: $\langle\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}\rangle = \langle\vec{u}, \vec{w}\rangle + \langle\vec{v}, \vec{w}\rangle$; $\langle s\vec{u}, \vec{v}\rangle = s\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle$; *Symetrie*: $\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle\vec{v}, \vec{u}\rangle$; *pos. Definitheit*; $\langle\vec{u}, \vec{u}\rangle \geq 0$; $\langle\vec{u}, \vec{u}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$				
Norm. Vektor-raum (V, ‖ · ‖):	Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit definierter Norm	$V \rightarrow \mathbb{R}_0^+: \vec{x} \rightarrow \lVert\vec{x}\rVert$: $(\lVert s\vec{x}\rVert = \lvert s\rvert\lVert\vec{x}\rVert) \land (\lVert\vec{x} + \vec{y}\rVert \leq \lVert\vec{x}\rVert + \lVert\vec{y}\rVert) \land (\lVert\vec{x}\rVert \geq 0;\ \lVert\vec{x}\rVert = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0})$				
Euklidische Norm (Länge):	$\lVert\vec{x}\rVert_2 = \sqrt{\langle\vec{x}, \vec{x}\rangle}$	Abstand:	$d(\vec{x}, \vec{y}) = \lVert\vec{x} - \vec{y}\rVert_2$	Winkel: $\varphi = \arccos\frac{\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle}{\lVert\vec{x}\rVert_2\lVert\vec{y}\rVert_2}$	Cauchy-Schwarz:	$\lvert\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle\rvert \leq \lVert\vec{x}\rVert_2\lVert\vec{y}\rVert_2$
Dreiecksungl.:	$\vec{u}, \vec{v} \in V, (V, \lVert \cdot \rVert)$: $\lVert\vec{u} + \vec{v}\rVert \leq \lVert\vec{u}\rVert + \lVert\vec{v}\rVert$; $\lvert\lVert\vec{u}\rVert - \lVert\vec{v}\rVert\rvert \leq \lVert\vec{u} - \vec{v}\rVert$	Pythagoras:	$\vec{x} \perp \vec{y}$: $\lVert\vec{x} + \vec{y}\rVert_2^2 = \lVert\vec{x}\rVert_2^2 + \lVert\vec{y}\rVert_2^2$			
Lin. unabhängig	$s_1\vec{v}_1 + s_2\vec{v}_2 + \cdots + s_k\vec{v}_k = \vec{0} \Longrightarrow$ *wenn w. A. nur mit allen* $s_k = 0$, *dann ist* $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k$ *l. u.* $(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k \neq \vec{0})$					
Unterraum	$(U \subseteq V) \land (\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in U \Longrightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in U) \land (\vec{v} \in U \Longrightarrow s\vec{v} \in U)$	$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$				
Direkte Summe	$V = U \oplus W \Leftrightarrow (V = U + W) \land (U \cap W = \{\vec{0}\})$					
Gram-Schmidt	*Geg.*: $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$; $\vec{w}_1 = \vec{b}_1$; $\vec{w}_2 = s_{21}\vec{w}_1 + \vec{b}_2$; $\vec{w}_3 = s_{31}\vec{w}_1 + s_{32}\vec{w}_2 + \vec{b}_3$; $s_{ij} = -\frac{\langle b_i, w_j\rangle}{\langle w_j, w_j\rangle}$; $\vec{c}_i = \frac{\vec{w}_i}{\lVert\vec{w}_i\rVert}$					
Orthogonalbas.:	*B ist OGB, wenn* $\langle b_i, b_j\rangle = 0: \forall i \neq j$	Orthonormalbasis:	*B ist ONB, wenn* $\langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij}$	In ONB: $\langle\vec{x}, \vec{b}_i\rangle = x_i$		

Gleichungssysteme

$A\vec{x}=\vec{b}$ lösbar:	$\text{Rang}(A\mid\vec{b})=\text{Rang}(A) \Leftrightarrow \vec{b}\in\text{Bild}(A) \Leftrightarrow \vec{b}\cdot\vec{z}=0{:}\ \forall\vec{z}\in\text{Kern}(A^T)$	$\nexists$Lsg.:	$\text{Rang}(A\mid\vec{b})\neq\text{Rang}(A)$
$A\vec{x}=\vec{b};\ \exists 1$Lsg.:	$\text{Rang}(A\mid\vec{b})=\text{Rang}(A)=n \Leftrightarrow \det(A)\neq 0$	$\exists\infty$Lsg.:	$\det(A)\neq 0 \wedge \text{Rang}(A\mid\vec{b})=\text{Rang}(A)$

Lösen von 3x3 Gleichungssystemen mit der Cramer-Regel:

$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ $a_3x+b_3y+c_3z=d_3$	$D=\det\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$	$D_x=\det\begin{vmatrix}d_1&b_1&c_1\\d_2&b_2&c_2\\d_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$	$D_y=\det\begin{vmatrix}a_1&d_1&c_1\\a_2&d_2&c_2\\a_3&d_3&c_3\end{vmatrix}$	$D_z=\det\begin{vmatrix}a_1&b_1&d_1\\a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\end{vmatrix}$	$x=\frac{D_x}{D}\ y=\frac{D_y}{D}$ $z=\frac{D_z}{D}$

Differenzialgleichungssysteme

$\dot{\vec{x}}(t)=\boldsymbol{A}\,\vec{x}(t)$	EW: $p(\lambda)=\det(A-\lambda\mathbb{1})=0$	EV: $\in \text{Eigenraum}(\lambda_i)=\text{Kern}(A-\lambda_i\mathbb{1})$	Norm. EV: $\vec{e}_i=\frac{\vec{v}_i}{\lVert\vec{v}_i\rVert}$	$\Lambda=[\vec{e}_1\ldots\vec{e}_n]$
Homogene Lösung:	$\vec{x}=A\vec{x}\ \lvert\vec{x}=y_1\vec{e}_1+\cdots+y_n\vec{e}_n \Rightarrow \dot{\vec{y}}=T_{\Lambda\leftarrow E}AT_{E\leftarrow\Lambda}\vec{y} \Rightarrow \dot{\vec{y}}=\Lambda^{-1}A\Lambda\vec{y} \Rightarrow \dot{\vec{y}}=\text{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\,\vec{y} \Rightarrow \dot{y}_i=\lambda_iy_i \Rightarrow y_i=a_ie^{\lambda_it} \Rightarrow$ $\vec{x}=T_{E\leftarrow\Lambda}\vec{y} \Rightarrow \vec{x}=\Lambda\vec{y} \Rightarrow$ Bestimme a_i mittels RB und KV.			

$\dot{\vec{x}}(t)=\boldsymbol{A}\,\vec{x}(t)+\vec{f}(t)$	EW: $p(\lambda)=\det(A-\lambda\mathbb{1})=0$		EV: $\vec{v}_{1\ldots n}\in\text{Eigenraum}(\lambda_i)=\text{Kern}(A-\lambda_i\mathbb{1})$		Wenn n<g, HV: $(A-\lambda_i\mathbb{1})\vec{h}=\vec{v}_i$	
Homogene Lösung:	Für jeden EV zu $\lambda_i\in\mathbb{R}$: $\vec{y}_h=c_ie^{\lambda_it}\vec{v}_i$		Für jeden 1. HV zu $\lambda_i\in\mathbb{R}$: $\vec{y}_h=c_ie^{\lambda_it}(\vec{h}+t\vec{v}_i)$			
	Für jeden EV $\vec{v}_{ij}=\vec{a}\pm i\vec{b}$ zu $\lambda_{ij}=\alpha\pm i\beta$: $\vec{y}_h=c_ie^{\alpha t}(\vec{a}\cos\beta t-\vec{b}\sin\beta t)+c_je^{\alpha t}(\vec{b}\cos\beta t+\vec{a}\sin\beta t)$					
Partikuläre Lösung	$\vec{f}(t)=\vec{\alpha}\,{\sin\atop\cos}\,\omega t$:	$\vec{y}_p=\vec{a}\sin\omega t+\vec{b}\cos\omega t$	$\vec{f}(t)=\vec{\alpha}+\vec{\beta}t+\vec{\gamma}t^2+\cdots$	$\vec{y}_p=\vec{a}+\vec{b}t+\vec{c}t^2+\cdots$	$\vec{f}(t)=\vec{\alpha}e^{\omega t}$	$\vec{y}_p=\vec{a}e^{\omega t}$

$\boldsymbol{B}\,\ddot{\vec{y}}(t)+\boldsymbol{C}\,\vec{y}(t)=\vec{\mathrm{k}}(t)$	$p(\lambda)=\det(C-\lambda B)=0$	$\vec{q}_{1\ldots n}\in\text{Kern}(C-\lambda_iB)$	$\mu_{1\ldots n}=\sqrt{\lambda_{1\ldots n}}$		
Hom. Lsg.:	Für jedes $\vec{q}_i$ zu $\lambda_i\in\mathbb{R}$: $\vec{y}_h=\vec{q}_i(\alpha_i\cos\mu t+\beta_i\sin\mu t)$				
Partikuläre Lösung:	$\vec{\mathrm{k}}(t)=\vec{\alpha}\sin\omega t;\ \omega\neq\mu_i$	$\vec{y}_p=\vec{a}\sin\omega t$	$\vec{\mathrm{k}}(t)=\vec{\alpha}\sin\omega t;\ \omega=\mu_i$	$\vec{y}_p=\vec{a}t\sin\omega t$	
	$\vec{\mathrm{k}}(t)=\vec{\alpha}\cos\omega t;\ \omega\neq\mu_i$	$\vec{y}_p=\vec{a}\cos\omega t$	$\vec{\mathrm{k}}(t)=\vec{\alpha}\cos\omega t;\ \omega=\mu_i$	$\vec{y}_p=\vec{a}t\cos\omega t$	$\vec{\mathrm{k}}(t)=\vec{\alpha}e^{\omega t}$: $\vec{y}_p=\vec{a}e^{\omega t}$

Nabla-Operator, Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace

Nabla Operator:	$\vec{\nabla}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix};\ (\vec{\nabla})_i=\partial_i\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial}{\partial x_i}$	Gradient von $f(\vec{r})$ (skalar)	$\text{grad}(f(\vec{r}))=\vec{\nabla}f(\vec{r})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x}\\\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y}\\\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z}\end{pmatrix}=\partial_if$	Gradient von $\vec{v}$ (vektoriell)	$\text{grad}(\vec{v})=\vec{\nabla}\otimes\vec{v}=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_x}{\partial x}&\frac{\partial v_y}{\partial x}&\frac{\partial v_z}{\partial x}\\\frac{\partial v_x}{\partial y}&\frac{\partial v_y}{\partial y}&\frac{\partial v_z}{\partial y}\\\frac{\partial v_x}{\partial z}&\frac{\partial v_y}{\partial z}&\frac{\partial v_z}{\partial z}\end{pmatrix}$
Nabla Zylinder-koord.:	$\vec{\nabla}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$	Nabla Kugel-koord.	$\vec{\nabla}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\\\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\end{pmatrix}$	Laplace $\Delta=\vec{\nabla}^2$	Karth.: $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Zylinder: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Kugel: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

Divergenz von $\vec{v}(\vec{r})$: wenn 0 ⇒ quellenfrei	$\text{div}\begin{pmatrix}v_x(\vec{r})\\v_y(\vec{r})\\v_z(\vec{r})\end{pmatrix}=\vec{\nabla}\cdot\begin{pmatrix}v_x(\vec{r})\\v_y(\vec{r})\\v_z(\vec{r})\end{pmatrix}=\frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial x}+\frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial y}+\frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial z};\ (\vec{\nabla}\cdot\vec{v})_i=\partial_iv_i$		
Rotation von $\vec{v}(\vec{r})$:	$\text{rot}\begin{pmatrix}v_x(\vec{r})\\v_y(\vec{r})\\v_z(\vec{r})\end{pmatrix}=\vec{\nabla}\times\begin{pmatrix}v_x(\vec{r})\\v_y(\vec{r})\\v_z(\vec{r})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial y}-\frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial z}\\\frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial z}-\frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial x}\\\frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial x}-\frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial y}\end{pmatrix}=\varepsilon_{ijk}\partial_jx_k$	Wenn 0: wirbelfrei⇒ $\exists$ Potential $\nabla\phi=\vec{v}(\vec{r})$	
Laplace-Operator von $f(\vec{r})$ (skalar)	$\Delta f(\vec{r})=\text{div}(\text{grad}(f(\vec{r})))$ $\Delta f(\vec{r})=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}f(\vec{r}))$ $\Delta f(\vec{r})=\frac{\partial^2f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2f}{\partial z^2}$	Laplace-Operator vektoriell	$\Delta\begin{pmatrix}v_x(\vec{r})\\v_y(\vec{r})\\v_z(\vec{r})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta v_x(\vec{r})\\\Delta v_y(\vec{r})\\\Delta v_z(\vec{r})\end{pmatrix}$

Rechenregeln:

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}f)=0$ ("Gradientenfeld ist wirbelfrei")
$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{v})=0$ ("Feld der Rotation ist quellenfrei")
$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}f)=\Delta f$
$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{v})=(\vec{\nabla}f)\cdot\vec{v}+f(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$
$\vec{\nabla}\times(f\vec{v})=(\vec{\nabla}f)\times\vec{v}+f(\vec{\nabla}\times\vec{v})$
$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{v}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})-\Delta\vec{v}$
$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{\nabla}g)=(\vec{\nabla}f)\cdot(\vec{\nabla}g)+\Delta g$
$\vec{\nabla}(fg)=f(\vec{\nabla}g)+g(\vec{\nabla}f)$
$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{v})=f(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})+\vec{v}(\vec{\nabla}f)$
$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$ ("BAC-CAB-Regel")
$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a})-\vec{a}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{b})$

Divergenz Zylinder-koord.	$\vec{\nabla}\cdot\begin{pmatrix}v_r(r,\varphi,z)\\v_\varphi(r,\varphi,z)\\v_z(r,\varphi,z)\end{pmatrix}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$	Divergenz Kugel-koord.:	$\vec{\nabla}\cdot\begin{pmatrix}v_r(r,\vartheta,\varphi)\\v_\vartheta(r,\vartheta,\varphi)\\v_\varphi(r,\vartheta,\varphi)\end{pmatrix}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2v_r)+\frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(v_\vartheta\sin(\vartheta))+\frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}$
Rotation Zylinder-koord.	$\vec{\nabla}\times\begin{pmatrix}v_r(r,\varphi,z)\\v_\varphi(r,\varphi,z)\\v_z(r,\varphi,z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\\\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial r}\\\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\varphi)-\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right]\end{pmatrix}$	Rotation Kugel-koord.	$\vec{\nabla}\times\begin{pmatrix}v_r(r,\vartheta,\varphi)\\v_\varphi(r,\vartheta,\varphi)\\v_z(r,\vartheta,\varphi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{r\sin(\vartheta)}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(v_\varphi\sin(\vartheta))-\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\varphi}\right]\\\frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\varphi)\\\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\vartheta)-\frac{\partial v_r}{\partial\vartheta}\right]\end{pmatrix}$

Indexnotation und Einsteinsche Summenkonvention

Matrixdarstellung:	$A \equiv a_{ij}$ mit a_{ij} als Element der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Matrix A.							
Summe, einfache Var.:	Nur untere Indizes. Über doppelt auftretende Indizes innerhalb eines Terms wird summiert, z.B.: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$							
Summe, erweiterte Var.:	Summiert wird nur, wenn der Index sowohl oben (kontravariant) als auch unten (kovariant) steht.							
$x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \lVert\vec{x}\rVert^2$	$\sqrt{x_i x_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i x_i} = \sqrt{x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \lVert\vec{x}\rVert$							
Kronecker-Delta:	$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, wenn\ i = j \\ 0, wenn\ i \neq j \end{cases}$	Levi-Civita-Symbol:	$\varepsilon_{ijk\ldots} = \begin{cases} 1, wenn\ (ijk\ldots)\ eine\ gerade\ Permutation\ von\ (123\ldots) ist \\ -1, wenn\ (ijk\ldots)\ eine\ ungerade\ Permutation\ von\ (123\ldots) ist \\ 0\ sonst\ (i.e.\ wenn\ mindestens\ zwei\ Indizes\ gleich\ sind) \end{cases}$					
Rechenregeln:	$\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$	$\delta_{ij} a_i = a_j$; $\delta_{ij} a_j = a_i$	$\delta_{ij} \mathrel{\hat=} \mathbb{1}$	$\delta_{ij} = \delta_{ji}$	$\delta_i^j \delta_j^i = n$	$\delta_{ii} = n$	$\boldsymbol{\varepsilon_{lmn\ldots}} = \boldsymbol{\varepsilon_{ijk\ldots}}$, wenn gerade Perm., sonst $-\boldsymbol{\varepsilon_{ijk\ldots}}$	
Ein gem. Index bei ε:	$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \det\begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{pmatrix} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$	Bei anderer Indexreihenfolge:	Permutieren bis auf $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}$; Vorzeichen nötigenfalls anpassen, Indizes passend umbenennen.					
Zwei gem. Indizes bei ε:	$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$	Alle Indizes gleich bei ε:	$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = n!;\ z.B.: \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 3! = 6$	Zwei gem. Indizes bei ε und δ	$\varepsilon_{ijk}\delta_{ij} = 0;\ \varepsilon_{ijk}\delta_{ik} = 0;$ $\varepsilon_{ijk}\delta_{jk} = 0$			
Ableitung	$\vec{\nabla}_i = \partial_i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x_i}$	$\partial_i x_j = \delta_{ij}$	$\partial_i x_i = \delta_{ii} = n$	$\vec{\nabla} f = \partial_i f$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \partial_i v_i$	$(\vec{x} \times \vec{y})_i = \varepsilon_{ijk} x_j y_k$	$(\vec{\nabla} \times \vec{x})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j x_k$	

4er Formalismus mit Minkowski-Metrik

4er-Vektor kontravariant	$a^\mu = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vec{a} \end{pmatrix}$	4er-Gradient	$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}$	Quabla:	$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \vec{\Delta}$	Minkowsi-metrik (karth. Koord.):	$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; $\det(\eta_{\mu\nu}) = -1$	4er-Vektoren u. Tensoren und ihre Skalarprodukte sind Lorentz-invariant.
Index unten ⇔ „kovariant“, Index oben ⇔„kontravariant“.	Indexwechsel ko/kontra in Metrik(+,-,-,-) ⇒ Vorzeichenwechsel bei a_1, a_2, a_3							
Rechenregeln	$\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\sigma} = \eta^\mu{}_\sigma = \delta_\sigma^\mu$	$a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu$	$a^\mu = \eta^{\mu\nu} a_\nu$	$A^{\mu\nu} = A^\mu{}_\beta \eta^{\beta\nu} = \eta^{\mu\alpha} A_{\alpha\beta} \eta^{\beta\nu}$	$A_{\mu\nu} = A_\mu{}^\beta \eta_{\beta\nu} = \eta_{\mu\alpha} A^{\alpha\beta} \eta_{\beta\nu}$			
	$A^{\mu\nu}_{\ \downarrow} B^{\mu\uparrow}{}_\nu = A^\mu{}_\beta \eta^{\beta\nu} B^\mu{}_\nu = A^\mu{}_\beta B^{\mu\beta} = A^\mu{}_\nu B^{\mu\nu}$	$(\eta_{\mu\nu})^{-1} = \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = (\eta^{\mu\nu})^{-1}$	$\eta^{\mu\nu} = \eta^{\nu\mu}$	$\partial^\mu x_\nu = \delta_\nu^\mu$	$\partial^\mu x^\nu = \eta^{\mu\nu}$	$\partial_\mu x_\nu = \eta_{\mu\nu}$		
	$(A^{\mu\nu})^T = A^{\nu\mu}$	$(\Lambda^\mu{}_\nu)^T = A_\nu{}^\mu$	$(A^{\mu\nu})^{-1} = A_{\mu\nu}$	$A_{\mu\beta} B^\beta{}_\nu = A_\mu{}^\beta B_{\beta\nu} \mathrel{\hat=} (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})_{\mu\nu}$	$A_{\beta\nu} B_\mu{}^\beta = A^\beta{}_\nu B_{\mu\beta} = B_{\mu\beta} A^\beta{}_\nu = B_\mu{}^\beta A_{\beta\nu} \mathrel{\hat=} (\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}})_{\mu\nu}$			
	$A^\beta{}_\mu B_{\beta\nu} = A_{\beta\mu} B^\beta{}_\nu = (A^T)_\mu{}^\beta B_{\beta\nu} = (A^T)_{\mu\beta} B^\beta{}_\nu \mathrel{\hat=} (\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{B}})_{\mu\nu}$	$A_{\mu\beta} B_\nu{}^\beta = A_\mu{}^\beta B_{\nu\beta} = A_{\mu\beta} (B^T)^\beta{}_\nu = A_\mu{}^\beta (B^T)_{\beta\mu} \mathrel{\hat=} (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}^T)_{\mu\nu}$						
Skalarprodukt in $\mathbb{R}^{3,1}$:	$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 = \boldsymbol{a}^T \eta\, \boldsymbol{b} = a^\mu \eta_{\mu\nu} b^\nu = a_\mu b^\mu$							
Jeder Tensor 2. Stufe kann in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil zerlegt werden: $A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$								

BraKet-Notation und Dualraum

Allgemeines:	Ein Vektor $\vec{x}$ existiert prinzipiell unabhängig davon, in welcher Basis er dargestellt wird, d.h. $\vec{x}$, oder auch $\lvert x\rangle$ und $\langle x\rvert$ repräsentieren an sich noch keine bestimmten Koordinatenwerte, weil die Darstellung basisunabhängig ist!						
Dualraum:	• Sei $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\} \in V$ eine beliebige Basis des Basisraums V, und dann ist $B^* = \{\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \ldots, \vec{e}_n^*\} = \{\vec{e}^1, \vec{e}^2, \ldots, \vec{e}^n\} \in V^*$ die korrespondierende Duale Basis im Dualraum V* • Die Vektoren des Basisraums sind Spaltenvektoren, die Vektoren des Dualraums sind Zeilenvektoren. • Der Dualraum ist also der Raum aller Zeilenvektoren, (hier:) K=ℂ. Das kann man auch als Raum aller linearen Funktionale $V: \mathbb{C}^{nx1} \to \mathbb{C}$ verstehen, wenn man jeden Vektor $\vec{x}^* \in$ V* als 1xn-Funktionalmatrix (Tensor) interpretiert, der multipliziert mit einem Vektor $\vec{y} \in$ V (interpretiert als nx1-Matrix) einen Skalar ∈ℂ liefert (Linearität ist inhärent).						
Ket-Vektor	$\lvert x\rangle = \vec{x} \in V$ ist ein Vektor im Basisraum.	Bra-Vektor:	$\langle y\rvert = \vec{y}^* \in V^*$ ist ein Vektor im Dualraum.				
Dualraumbasis:	Von B→B*: $\underline{B}^{-1} = \underline{B}^*$: $\begin{bmatrix} \vert & \vert & \vert \\ \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_n \\ \vert & \vert & \vert \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\ \vec{e}^1\ - \\ \cdots \\ -\ \vec{e}^n\ - \end{bmatrix}$; $wobei\ [\vec{e}_i, \vec{e}^j] \overset{\text{def}}{=} \delta_{ij}$	OGB:	$\vec{b}^i = \frac{\vec{e}_i^{\,\dagger}}{\lVert\vec{e}_i\rVert^2}$	ONB:	$\vec{e}^i = \vec{e}_i^{\,\dagger}$		
Inneres Produkt	$\langle x\vert y\rangle$ kann als Vektorprodukt $\vec{x} \cdot \vec{y}$ mit $\vec{x}$ und $\vec{y}$ als Spaltenvektoren interpretiert werden, besser ist aber die Interpretation als Matrixmultiplikation der beiden Matrizen $\underline{x}^{1xn} \underline{y}^{nx1}$.						
Dualität:	$K = \mathbb{R}: \langle x\vert y\rangle = \langle y\vert x\rangle;\ K = \mathbb{C}: \langle x\vert y\rangle = \overline{\langle y\vert x\rangle}$	Linearität im 1. Argument:	$\langle \alpha x + \beta y\vert z\rangle = \alpha\langle x\vert z\rangle + \beta\langle y\vert z\rangle$				
Basisvektoren:	Die definierende Eigenschaft der dualen Basisvektoren ist: $\langle e^i \vert e_j\rangle = (\vec{e}^j)^T \vec{e}_j = \delta_j^i$						
Äußeres Produkt:	$\lvert x\rangle\langle y\rvert = \vec{x} \otimes \vec{y}^T \mathrel{\hat=} \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_m y_1 & \cdots & x_m y_n \end{pmatrix}$						
Darst. in V u. V*	$\vec{x}$ kann in Basis B dargestellt werden als $\lvert x\rangle = \vec{x} \mathrel{\hat=} x^i \vec{e}_i$, oder im Dualraum mit Basis B*: $\langle x\rvert = \vec{x}^\dagger \mathrel{\hat=} x_i \vec{e}^i$						
Projektor:	• $P_{\lvert x\rangle} = \lvert x\rangle\langle x\rvert$ ist ein Projektor auf den Vektor $\lvert x\rangle$. • Anm: In einer OGB kann der Projektor auch ohne Dualraum konstruiert werden: $P_{\vec{x}} = \frac{1}{\vec{x}\cdot\vec{x}} \vec{x} \otimes \vec{x}^T$ • Entsprechend ist $E_i = \lvert e^i\rangle\langle e_i\rvert$ ein Projektor auf den Basisvektor $\vec{e}_i$. • Ein normierter Dualraumbasisvektor $\vec{e}^i = \langle e^i \rvert$ „pickt“ die zugehörige i-te Koordinate eines Vektors $\lvert x\rangle$ heraus: $x^i \lvert e_i\rangle = E_i \lvert x\rangle = \lvert e_i\rangle\langle e^i \vert x\rangle \Rightarrow \boxed{x^i = \langle e^i \vert x\rangle = \vec{e}^i \vec{x}}$ • Umgekehrt: Der normierte Basisvektor $\vec{e}_i = \lvert e_i\rangle$ ermittelt die i-te Koordinate des Dualvektors $\boxed{x_i = \langle x \vert e_i\rangle = \vec{e}_i \vec{x}^\dagger}$						
ONB:	In einer Orthonormalbasis gilt: $\langle x\rvert = \lvert x\rangle^\dagger \Leftrightarrow \vec{x}^* = \vec{x}^\dagger;\ x_i = \bar{x}^i;\ \vec{e}^i = \vec{e}_i^{\,\dagger}$						
Produktregeln	$\alpha\lvert x\rangle = \lvert y\rangle \Leftrightarrow \langle x\rvert\bar{\alpha} = \langle y\rvert;\ \alpha \in \mathbb{C}$	$M\lvert x\rangle = \lvert y\rangle \Leftrightarrow \langle x\rvert M^\dagger = \langle y\rvert;\ M \in \mathbb{C}^{nxn}$					
Klammer-Notation:	Funktional $[x, y] \overset{\text{def}}{=} y(x)$. (Nur) im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ gilt: $[x, y] = \langle x\vert y\rangle$						

Basiswechsel und Metrischer Tensor

kovariant, kontravaiant

- Index unten ⇔ „kovariant", Index oben ⇔„kontravariant".
- Kontravariante Größen werden kleiner, wenn kovarianten Größen wachsen, und umgekehrt.
- Die Basisvektoren $\vec{e}_i$ des Basisraums V sind kovariant.
- Die Koordinaten x^i von Vektoren im Basisraum ($|x\rangle \mathrel{\hat{=}} x^i\vec{e}_i$) kontravariant.
- Die Basisvektoren $\vec{e}^i$ des Dualraums V* sind kontravariant.
- Die Koordinaten x_i^* von Vektoren im Dualraum ($\langle x| \mathrel{\hat{=}} x_i^*\vec{e}^i$) sind kovariant.

Basiswechsel im Basisraum

Geg.: kovariante Basis $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$; „neue" kovariante Basis $B' = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}_B$;
kontravarianter Vektor $[\vec{x}]_B = \sum_i x^i \vec{e}_i \mathrel{\hat{=}} [\vec{x}]_{B'} = \sum_i y^i \vec{f}_i$

$B \to B'$ $[\vec{x}]_B \to [\vec{x}]_{B'}$	Trafo.-matrix: $\underline{\underline{A}} = a^i{}_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}$ $dx^i = \sum_j a^i{}_j\, dy^j$	Basis-trafo: $[\vec{f}_j]_B = \sum_i \vec{e}_i a^i{}_j$; $\begin{bmatrix} \vert & & \vert \\ \vec{f}_1 & \cdots & \vec{f}_n \\ \vert & & \vert \end{bmatrix}_B = \underline{\underline{A}}^T \begin{bmatrix} \vert & & \vert \\ \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_n \\ \vert & & \vert \end{bmatrix}_B$	Vektor koord. trafo.	$y^i = \sum_j (a^{-1})^i{}_j x^j$ $[\vec{x}]_{B'} = \underline{\underline{A}}^{-1}[\vec{x}]_B = \underline{\underline{J}}[\vec{x}]_B$
$B' \to B$ $[\vec{x}]_{B'} \to [\vec{x}]_B$	Jacobi-matrix: $\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{A}}^{-1} = \mathrm{J}^i{}_j = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$ $dy^i = \sum_j \mathrm{J}^i{}_j\, dy^j$	Basis-trafo: $\vec{e}_j = \sum_i \vec{f}_i\, \mathrm{J}^i{}_j$; $\begin{bmatrix} \vert & & \vert \\ \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_n \\ \vert & & \vert \end{bmatrix} = \underline{\underline{J}}^T \begin{bmatrix} \vert & & \vert \\ \vec{f}_1 & \cdots & \vec{f}_n \\ \vert & & \vert \end{bmatrix}$	Vektor koord. trafo.	$x^i = \sum_j a^i{}_j y^j$ $[\vec{x}]_B = \underline{\underline{J}}^{-1}[\vec{x}]_{B'} = \underline{\underline{A}}[\vec{x}]_{B'}$ $[\partial/\partial x]_B = \underline{\underline{J}}^T[\partial/\partial x]_{B'}$

Basiswechsel im Dualraum

Geg.: kontravariante duale Basis $B^* = \{\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n\}$; „neue" kontravariante duale Basis $B^{*\prime} = \{\vec{f}^1, \dots, \vec{f}^n\}$;
kovarianter dualer Vektor $[\vec{x}^T]_{B^*} = (\sum_i \vec{e}^i)^T \mathrel{\hat{=}} [\vec{x}^T]_{B^{*\prime}} = \left(\sum_i y_i^* \vec{f}^i\right)^T$

$B^* \to B^{*\prime}$ $[\vec{x}^T]_{B^*} \to [\vec{x}^T]_{B^{*\prime}}$	Jacobi-Matrix: $\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{A}}^{-1} = J^i{}_j$ (s.o.)	Basis-trafo: $[\vec{f}^i]_{B^*} = \sum_j J^i{}_j \vec{e}^j$; $\begin{bmatrix} — \vec{f}^1 — \\ — \vdots — \\ — \vec{f}^n — \end{bmatrix}_{B^*} = \underline{\underline{J}} \begin{bmatrix} — \vec{e}^1 — \\ — \vdots — \\ — \vec{e}^n — \end{bmatrix}_{B^*}$	Vektor koord. trafo.	$y_i^* = \sum_j x_j^* a^j{}_i$ $[\vec{x}^T]_{B^{*\prime}} = [\vec{x}^T]_{B^*}\, \underline{\underline{A}}$
$B^{*\prime} \to B^*$ $[\vec{x}^T]_{B^{*\prime}} \to [\vec{x}^T]_{B^*}$	Trafo-matrix $\underline{\underline{A}} = a^i{}_j$ (s.o.)	Basis-trafo: $\vec{e}^i = \sum_j a^i{}_j \vec{f}^j$; $\begin{bmatrix} — \vec{e}^1 — \\ — \vdots — \\ — \vec{e}^n — \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} — \vec{f}^1 — \\ — \vdots — \\ — \vec{f}^n — \end{bmatrix}$	Vektor koord. trafo.	$x_i^* = \sum_j y_j^* (a^{-1})^j{}_i$ $[\vec{x}^T]_{B^*} = [\vec{x}^T]_{B^{*\prime}}\, \underline{\underline{A}}^{-1}$

Metrik:

Metrik ist ein Funktional $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften: (1) Symetrie: $\mathrm{g}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathrm{g}(\vec{y}, \vec{x})$;
(2) Bilinearität: $\mathrm{g}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = \alpha\, \mathrm{g}(\vec{x}, \vec{z}) + \beta\, \mathrm{g}(\vec{y}, \vec{z})$; (3) nichtentartet: $\forall\vec{x}\exists\vec{y}: \mathrm{g}(\vec{y}, \vec{x}) \neq 0$

Metrischer Tensor G und G*:

Geg.: kovariante Basis $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$; kontravariante duale Basis $B^* = \{\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n\}$.
Der Metrische Tensor erlaubt den „Wechsel von kovariant zu kontravariant" (und umgekehrt)

$$G = \underline{\underline{B}}^T\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} — \vec{e}_1 — \\ — \vdots — \\ — \vec{e}_1 — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vert & & \vert \\ \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_n \\ \vert & & \vert \end{bmatrix} \mathrel{\hat{=}} g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j;$$

$$G^* = G^{-1} = \underline{\underline{B}}^*(\underline{\underline{B}}^*)^T = \begin{bmatrix} \vert & & \vert \\ \vec{e}^1 & \cdots & \vec{e}^n \\ \vert & & \vert \end{bmatrix} \begin{bmatrix} — \vec{e}^1 — \\ — \vdots — \\ — \vec{e}^n — \end{bmatrix} \mathrel{\hat{=}} g^{ij} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j;$$

In ONB: $G = G^* = \mathbb{1} = g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij} = \delta^{ij}$
Basistransformation von $B \to B^*$: $\vec{e}^i = \sum_j g^{ij}\vec{e}_j \Leftrightarrow \underline{\underline{B}}^* = G^*\underline{\underline{B}}$
Basistransformation von $B^* \to B$: $\vec{e}_i = \sum_j g_{ij}\vec{e}^j \Leftrightarrow \underline{\underline{B}} = G\underline{\underline{B}}^*$
Koordinatentransformation von ($|x\rangle \mathrel{\hat{=}} \sum_i x^i\vec{e}_i) \to (\langle x| \mathrel{\hat{=}} \sum_i x_i^*\vec{e}^i$): $x_i = \sum_j x^j g_{ji} \Leftrightarrow \langle x| = |x\rangle^T G$
Koordinatentransformation von ($\langle x| \mathrel{\hat{=}} \sum_i x_i^*\vec{e}^i) \to (|x\rangle \mathrel{\hat{=}} \sum_i x^i\vec{e}_i$): $x^i = \sum_j g^{ij} x_j \Leftrightarrow |x\rangle = G\,\langle x|^T$

Linienelement

Geg.: kartesische Basis $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$; „neue" kovariante Basis $B' = \{[\vec{f}_1]_{B'}, \dots, [\vec{f}_n]_B\}$ (z.B. Kugelkoordinaten);
Metrischer Tensor der „neuen" Basis B' (ausgedrückt in B): $[G']_B = [\underline{\underline{B}}']_B{}^T[\underline{\underline{B}}']_B$

Es sei $[d\vec{x}]_{B'} = \sum_i dy^i\vec{f}_i$. Dann ist $\boxed{ds = \sqrt{dy^i\, g_{ij}\, dy^j} = \sqrt{[d\vec{x}^T]_{B'}[G']_B[d\vec{x}]_{B'}}}$.

z.B. Kugelkoordinaten: $ds = \sqrt{(dr, d\vartheta, d\varphi)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} dr \\ d\vartheta \\ d\varphi \end{pmatrix}} = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\vartheta)^2 + r^2\sin^2\vartheta\,(d\varphi)^2}$

Flächenelement

Geg.: kartesische Basis $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$; „neue" kovariante Basis $B' = \{[\vec{f}_1]_{B'}, \dots, [\vec{f}_n]_B\}$ (z.B. Kugelkoordinaten);
Metrischer Tensor der „neuen" Basis B' (ausgedrückt in B): $[G']_B = [\underline{\underline{B}}']_B{}^T[\underline{\underline{B}}']_B$
Es sei $[\tilde{G}']_B$ der Teiltensor von $[G']_B$, der die Parameter u und v der Fläche beinhaltet.

z.B. Kugelkoordinaten: $u = \vartheta; v = \varphi$; $[\tilde{G}']_B = \begin{bmatrix} e_\vartheta \cdot e_\vartheta & e_\vartheta \cdot e_\varphi \\ e_\varphi \cdot e_\vartheta & e_\varphi \cdot e_\varphi \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{bmatrix}_B$

Dann ist: $\boxed{dA = \sqrt{\det\left([\tilde{G}']_B\right)}\, du\, dv}$ (z.B. Kugelkoordinaten: $dA = \sqrt{r^4\sin^2\vartheta}\, d\vartheta\, d\varphi = r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$).

Alternativ: $\boxed{dA = \|[\vec{e}_u]_B \times [\vec{e}_v]_B\|\, du\, dv}$ (z.B. Kugelkoordinaten: $dA = \left\|[\vec{e}_\vartheta]_B \times [\vec{e}_\varphi]_B\right\| d\vartheta\, d\varphi$).

Volumeselement

Geg.: kartesische Basis $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$; „neue" kovariante Basis $B' = \{[\vec{f}_1]_{B'}, \dots, [\vec{f}_n]_B\}$ (z.B. Kugelkoordinaten);
Metrischer Tensor der „neuen" Basis B' (ausgedrückt in B): $[G']_B = [\underline{\underline{B}}']_B{}^T[\underline{\underline{B}}']_B$
Es seien u, v und w die „neuen" Koordinaten.

Dann ist: $\boxed{dV = \sqrt{\det([G']_B)}\, du\, dv\, dw}$ (z.B. Kugelkoordinaten: $dV = \sqrt{r^4\sin^2\vartheta}\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = r^2\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$).

Alternativ: $\boxed{dV = \|[\vec{e}_u]_B \cdot ([\vec{e}_v]_B \times [\vec{e}_w]_B)\|\, du\, dv\, dw}$ (z.B. Kugelkoord.: $dV = \left\|[\vec{e}_r]_B \cdot \left([\vec{e}_\vartheta]_B \times [\vec{e}_\varphi]_B\right)\right\| dr\, d\vartheta\, d\varphi$).

Rechenregeln

$g^{ij}g_{ij} = g^i{}_j = \delta^i_j$ | $x_i = g_{ij}x^j$ | $x^i = g^{ij}x_j$

Matrixmultiplikation und Dyadisches Tensorprodukt

Produkt $A\cdot\vec{x}$ (Matrix mal Vektor) ($Drehstreckung\ von\ \vec{x}$)	*Bedingung:* *Spalten Matrix=* *Elemente Vektor*	$\begin{array}{c\|c} & \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix} & \begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\end{pmatrix}\end{array}$	$(A\vec{x})_{ij}=a_{ij}x_i$
Produkt $A\cdot B$ (Matrix mal Matrix) (i. A.: $A\cdot B\neq B\cdot A$)	*Bedingung:* *Spalten A=* *Zeilen B*	$\begin{array}{c\|c} & \begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{bmatrix}\end{array}$	$(AB)_{ik}=a_{ij}b_{jk}$ $(ABC)_{il}=a_{ij}b_{jk}c_{kl}$

(Dyadisches) Tensorprodukt	$(\vec{x}\otimes\vec{y})_{ij}=x_iy_j{}^T$	Quasimatrix-darstellung:	$\vec{x}\otimes\vec{y}\triangleq\begin{pmatrix}x_1y_1&\dots&x_1y_n\\\dots&\dots&\dots\\x_my_1&\dots&x_my_n\end{pmatrix}$	Quasivektor-darstellung:	$\vec{x}\otimes\vec{y}\triangleq\begin{pmatrix}x_1\vec{y}\\\dots\\x_m\vec{y}\end{pmatrix}$
Direkte Summe	$\underline{A}^{n\times n}\oplus\underline{B}^{m\times m}=\begin{pmatrix}\underline{A}^{n\times n}&\mathbb{0}^{n\times m}\\\mathbb{0}^{m\times n}&\underline{B}^{m\times m}\end{pmatrix}$				

Allgemeine m$_x$n-Matrizen bzw. Abbildungen (m…Zeilen, n…Spalten)

Linear unab.	Die Vektoren $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots\vec{v}_k$ sind LU, wenn die Gleichung $s_1\vec{v}_1+s_2\vec{v}_2+s_k\vec{v}_k=0$ nur erfüllt werden kann, wenn <u>alle</u> $s_i=0$	
Linear abh.	Die Vektoren $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots\vec{v}_k$ sind LA, wenn die Gleichung $s_1\vec{v}_1+s_2\vec{v}_2+s_k\vec{v}_k=0$ erfüllt werden kann für irgendein $s_i\neq0$	
Rang(A)= dim(Bild(A))	$\begin{bmatrix}x&x&x\\x&x&x\\x&x&x\end{bmatrix}\xrightarrow{Gauss}\begin{bmatrix}x&x&x\\0&x&x\\0&0&x\end{bmatrix}: Rang=\#Zeilen\neq0$	Rang = # linear unabhängiger Zeilenvektoren = # linear unabhängiger Spaltenvektoren
Basis(Bild(A))	$\begin{bmatrix}\vert&\vert&\vert\\ [\vec{a}_1]&[\vec{a}_2]&[\vec{a}_3]\\\vert&\vert&\vert\end{bmatrix}\xrightarrow{Gauss}\begin{bmatrix}x&x&x\\0&x&x\\0&0&0\end{bmatrix}\Longrightarrow Basis(B(A))=\mathcal{L}(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$	
Basis(Kern(A))	$\begin{bmatrix}x&x&x&x\\x&x&x&x\\x&x&x&x\end{bmatrix}\xrightarrow{Gauss}\begin{bmatrix}1&0&a&b\\0&1&c&d\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{ergänzen}\begin{bmatrix}1&0&a&b\\0&1&c&d\\0&0&X&0\\0&0&0&X\end{bmatrix}\Longrightarrow Basis(K(A))=\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}-a\\-c\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-b\\-d\\0\\1\end{pmatrix}\right)$	$Kern$: $\forall\vec{x}: A\vec{x}=\vec{0}$
Eigenwerte	Löse $\det(A-\lambda\mathbb{1})=0.$	Numerische Vielfachheit („Entartung") n_i für $\lambda_i=a$: Anzahl EW mit gleichem Wert a.
Eigenvektoren	EV $\vec{v}_i$ zu EW λ_i: $\left[\begin{array}{cccc\|c}x-\lambda_i&x&x&x&0\\x&x-\lambda_i&x&x&0\\x&x&x-\lambda_i&x&0\\x&x&x&x-\lambda_i&0\end{array}\right]\xrightarrow{Gauss}\left[\begin{array}{cccc\|c}1&0&0&a&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\Longrightarrow\begin{matrix}x_1=-at\\x_2=\ \ 0\\x_3=\ \ s\\x_4=\ \ t\end{matrix}\Longrightarrow\vec{v}_i=s\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-a\\0\\0\\1\end{pmatrix}$	
Hauptvektor wenn $g_i<n_i$	Anzahl EV für entartetes λ_i = „geom. Vielfachheit" g_i	$\left[\begin{array}{cccc\|c}x-\lambda_i&x&x&x&\vert\\x&x-\lambda_i&x&x&\vec{v}_i\\x&x&x-\lambda_i&x&\vert\\x&x&x&x-\lambda_i&\end{array}\right]\xrightarrow{Gauss}\left[\begin{array}{cccc\|c}1&0&0&0&a\\0&1&0&0&b\\0&0&1&0&c\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\Longrightarrow\begin{matrix}x_1=-a\\x_2=-b\\x_3=-c\\x_4=\ \ s\end{matrix}\Longrightarrow\vec{h}_i=s\begin{pmatrix}-a\\-b\\-c\\1\end{pmatrix}$
$[\vec{v}]_E\to[\vec{v}]_B$	$[B\mid[\vec{v}]_E]\xrightarrow{Gauss}[\mathbb{1}\mid[\vec{v}]_B]$; $oder$: $[\vec{v}]_B=T_{B\leftarrow E}[\vec{v}]_E=B^{-1}[\vec{v}]_E$	$[\vec{v}]_B\to[\vec{v}]_E$: $[\vec{v}]_E=T_{E\leftarrow B}[\vec{v}]_B=B[\vec{v}]_B$
$[\varphi(E)]_E\to[\varphi(E)]_B$	$[B\mid[\varphi(E)]_E]\xrightarrow{Gauss}[\mathbb{1}\mid[\varphi(E)]_B]$; $oder$: $[\varphi(E)]_B=T_{B\leftarrow E}\,[\varphi(E)]_E=B^{-1}[\varphi(E)]_E$	
$[\varphi(E)]_E\to[\varphi(B)]_B$	$\left[\begin{array}{ccc\|ccc}\vert&\vert&&\vert&\vert&\\\vec{b}_1&\vec{b}_2&\cdots&[\varphi(\vec{b}_1)]_E&[\varphi(\vec{b}_2)]_E&\cdots\\\vert&\vert&&\vert&\vert&\end{array}\right]\xrightarrow{Gauss}[\mathbb{1}\mid[\varphi(B)]_B]$; $oder$: $[\varphi(B)]_B=T_{B\leftarrow E}\,[\varphi(E)]_E\,T_{E\leftarrow B}=B^{-1}[\varphi(E)]_E\,B$	
$[\varphi(B)]_E\to[\varphi([\vec{x}]_E)]_B$	$[\varphi([\vec{x}]_E)]_B=T_{B\leftarrow E}\,[\varphi(B)]_E\,T_{B\leftarrow E}\,[\vec{x}]_E=B^{-1}\,[\varphi(B)]_E\,B^{-1}\,[\vec{x}]_E$	
$[\varphi(B)]_B\to[\varphi(C)]_C$	$[\varphi(C)]_C=T_{C\leftarrow B}\,[\varphi(B)]_B\,T_{B\leftarrow C}=\begin{bmatrix}\vert&\vert&\vert\\ [\vec{b}_1]_C&[\vec{b}_2]_C&\cdots\\\vert&\vert&\vert\end{bmatrix}[\varphi(B)]_B\begin{bmatrix}\vert&\vert&\vert\\ [\vec{c}_1]_B&[\vec{c}_2]_B&\cdots\\\vert&\vert&\vert\end{bmatrix}$	
$U=\mathcal{L}\{\vec{u},\vec{v}\}\to$ Basis$(U^\perp)$	$z.B.\,U\in\mathbb{R}^3$: Basis$(U^\perp)$ = Basis$\left(\text{Kern}\left(\begin{bmatrix}-&\vec{u}^T&-\\-&\vec{v}^T&-\\0&0&0\end{bmatrix}\right)\right)$q	
Natürliche Matrixnorm	$\Vert A\Vert_p=\max\limits_{\vec{x}\neq\vec{0}}\left(\dfrac{\Vert A\vec{x}\Vert_p}{\Vert\vec{x}\Vert_p}\right)=\max\limits_{\Vert\vec{x}\Vert_p=1}(\Vert A\vec{x}\Vert)$	1-Norm: $\Vert A\Vert_1=\max\limits_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^m\vert a_{ij}\vert$ (größte Spalten-betragssumme)
Spektralnorm	$\Vert A\Vert_2=\sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$	Maximum-Norm: $\Vert A\Vert_\infty=\max\limits_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^n\vert a_{ij}\vert$ (größte Zeilen-betragssumme)
Projektor auf einen Vektor:	$P_{\vert x\rangle}=\dfrac{\vert x\rangle\langle x\vert}{\langle x\vert x\rangle}=\dfrac{\vec{x}\otimes\vec{x}^\dagger}{\langle x\vert x\rangle}$	Projektor $\Leftrightarrow$ idempotent; Projektor $\Longrightarrow\forall\lambda_i=\pm1$
Zerlegung:	Sei $A\in\mathbb{C}^n$. Zerlegung: $A=B+iC$; $B=\frac{1}{2}(A+A^\dagger)$; $C=\frac{1}{2i}(A-A^\dagger)$	

Quadratische n$_x$n-Matrizen

Determi- nante:	$\det\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$ $\det\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - c_2 b_3 a_1 - c_3 b_1 a_2 = a_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$
invertierbar:	$\exists B: AB = \mathbb{1} \Leftrightarrow regulär$ Invertieren: $[A\vert\mathbb{1}] \xrightarrow{Gauss} [\mathbb{1}\vert A^{-1}]$ Invertieren 2x2: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
Rechen- regeln:	$\det(AB)$=$\det(A)\det(B)$ $\det(A^T)$=$\det(A)$ $\det(A^{-1})$=$\det(A)^{-1}$ $\det(sA)$=$s^n\det(A)$ $(AB)^T$=$B^T A^T$ $\det(A^\dagger)$=$\det(A)^*$ $A^{p+q} = A^p \cdot A^q$ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $(A+B)^T = A^T + B^T$ $e^A = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k}{k!} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} E_i$ $\mathrm{f}(A) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{f}(\lambda_i)\, E_i\,;\ E_i = \frac{\vert b_i\rangle\langle b_i\vert}{\langle b_i\vert b_i\rangle}$
regulär:	$\mathrm{Rang}(A) = n \Leftrightarrow Kern(A) = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}\ hat\ nur\ Lsg.\ \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \det\vert A\vert \neq 0 \Leftrightarrow \forall\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \exists: A^{-1}$ singulär$\Leftrightarrow$ ¬regulär
transponiert:	$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$ (Zeilen und Spalten vertauschen)
idempotent:	$AA = A$. „A ist idempotent“ $\Leftrightarrow$ „A ist ein Projektor“
adjungiert:	in $\mathbb{R}^{nxn}$: adjungiert≡transponiert ≡ A^T in $\mathbb{C}^{nxn}$: adjungiert≡transponiert&konjugiert ≡ $A^\dagger = (A^T)^* = (A^*)^T$; $(A^\dagger)_{ij} = \overline{(A)_{ji}}$
selbstadjung.	in $\mathbb{R}^{nxn}$: selbstadjungiert≡symmetrisch (s.u.) $\langle A\vec{x},\vec{y}\rangle = \langle\vec{x},A\vec{y}\rangle$ in $\mathbb{C}^{nxn}$: selbstadjungiert≡hermit (s.u.) $\langle A\vec{x}\vert\vec{y}\rangle = \langle\vec{x}\vert A\vec{y}\rangle$
positiv:	$A \geq 0, wenn\ \forall\vec{x} \in V: \langle A\vec{x}\vert\vec{x}\rangle \geq 0.$ Streng positiv: $A > 0, wenn\ \forall\vec{x} \in V: \langle A\vec{x}\vert\vec{x}\rangle > 0.$
symetrisch:	$A = A^T \Leftrightarrow EV\ bilden\ OGB\ D \Leftrightarrow \exists: OGB\ D: V^T A\, V = D$ symetrisch $\Longrightarrow \forall\lambda_i \in \mathbb{R}$.; symetrisch $\Longrightarrow$ diagonalisierbar
hermit:	A=$A^\dagger$, A^T=A^* $\Leftrightarrow EV\ bilden\ OGB\ D \Leftrightarrow \exists: OGB\ D: U^\dagger A\, U = D$ herm.$\Longrightarrow \forall\lambda_i \in \mathbb{R}$; h.$\Longrightarrow$diag.bar; h.$\Longrightarrow$selbstadj.; h.$\Longrightarrow$ normal
diag.sierbar:	$\exists T: T\,A\,T^{-1} = D \Leftrightarrow \exists\ Eigenbasis\ D: A = X\,D\,X^{-1} \forall\lambda_i: algebr.Vielfachheit\ n = geom.Vielfachheit\ g \Leftrightarrow AB = BA$
Kommutator	$[A,B] = AB - BA.$
normal:	A ist normal, wenn $[AA^*] = AA^* - A^*A = \mathbb{0}$.
orthogonal:	$A \in \mathbb{R}^{nxn}: A^T = A^{-1} \Leftrightarrow A\,A^T = \mathbb{1} \Leftrightarrow \Vert\vec{x}\Vert = \Vert A\vec{x}\Vert$ orthogonal $\Longrightarrow \det(A) = \pm1$; orthognal $\Longrightarrow \forall\lambda_i = \pm1$
unitär:	$A \in \mathbb{C}^{nxn}: U^\dagger = U^{-1} \Leftrightarrow U\,U^\dagger = \mathbb{1} \Leftrightarrow \Vert\vec{x}\Vert = \Vert U\vec{x}\Vert$ unitär $\Longrightarrow \vert\det(U)\vert = 1;\ \det(U) = e^{i\varphi};\ \forall\lambda_i = e^{it_i}$; diagonalisierbar; normal
Spur:	$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{ii}$ (Summe Hauptdiagonalelemente). Bei $ONB = \{\vert e_1\rangle,\dots,\vert e_i\rangle\}$: $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n}\langle e_i\vert Ae_i\rangle$
definit:	$\mathrm{q}(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$. Wenn $\mathrm{q}(\vec{x}) > (\geq)\ 0\ \forall\vec{x} \in \mathbb{R}^n\backslash\{\vec{0}\} \Longrightarrow$ positiv (semi)definit. Wenn $\mathrm{q}(\vec{x}) < (\leq)\ 0 \Longrightarrow$ negativ (semi)definit.
Hauptminorenkriterium:	$\det(M_k) > 0, k = 1\dots n \Longrightarrow pos.definit.;\ \ \mathrm{sgn}(\det(M_k)) = (-1)^k, k = 1\dots n \Longrightarrow neg.definit$
Permutationsmatrix:	Pro Zeile und Spalte nur ein Einser, sonst Nullen.
EW λ, EV $\vec{v}$	$A\vec{v} = \lambda\vec{v};\ Eigenvektor\ \vec{v} \in \mathbb{C}^n\backslash\{\vec{0}\}; Eigenwert\ \lambda \in \mathbb{C}. Wenn\ A \in \mathbb{R}^{nxn} \wedge pos.definit \Longrightarrow \forall\lambda_i \in \mathbb{R} \wedge \forall\lambda_i > 0.$ Berechnung EW: $A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Longrightarrow A\vec{v} = \lambda\mathbb{1}\vec{v} \Longrightarrow (A-\lambda\mathbb{1})\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow$ wenn $(A-\lambda\mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$ nur Lösung $\vec{v} = \vec{0}$ hat, ist $(A-\lambda\mathbb{1})$ regulär. Wir wollen aber Lösungen $\vec{v} \neq \vec{0} \Longrightarrow$ daher Berechnung wie folgt:
EW und EV	EW: $\mathrm{p}(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$; EV: $\vec{v}_{1\dots n} \in \mathrm{Eigenraum}(\lambda_i) = \mathrm{Kern}(A - \lambda_i\mathbb{1})$
Jordan:	$A = X\,J\,X^{-1};\ \ z.B: \lambda_1{:}n = 2; g = 1{:}\ J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix};\ X = \begin{bmatrix} \vert & \vert & \vert \\ \vec{v}_1 & \vec{h}_1 & \vec{v}_2 \\ \vert & \vert & \vert \end{bmatrix}$
Spektralsatz	Für jede *selbstadjungierte* oder *normale* Transformation **A** gibt es das *Spektrum* der Eigenwerte $\lambda_1 \dots \lambda_n$ und die Projektoren der EV $E_1 \dots E_n$, ($E_i = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i^T$) so dass gilt: **(1)** Alle λ_i sind paarweise unterschiedlich; **(2)** alle Projektoren E_i sind paarweise orthogonal und ungleich $\mathbb{0}$, **(3)** die Menge der Projektoren ist vollständig, i.e. $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{E_i} = \mathbb{1}$; **(4)** $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\lambda_i E_i}$ *(Spektralform)*
Zeichnen „neuer“ Achsen	Gegeben: Transformationsregeln $x_{neu} = \mathrm{f}_x(x_{alt}, y_{alt})$; $y_{neu} = \mathrm{f}_y(x_{alt}, y_{alt})$ Entlang y_{neu} ist $x_{neu} = 0 \Longrightarrow 0 = \mathrm{f}_x(x_{alt}, y_{alt})$ beschreibt „neue“ y-Achse; analog: $0 = \mathrm{f}_y(x_{alt}, y_{alt})$ ist „neue“ x-Achse. Achsenrichtung: Prüfe, wenn x_{alt} zunimmt, in welche Richtung nimmt $x_{neu} = \mathrm{f}_x(x_{alt}, y_{alt})$ zu. Analog „neue“ y-Achse.

Definitionen

Norm. Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$:	Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit definierter Norm: $V \to \mathbb{R}_0^+ : \vec{x} \to \|\vec{x}\|$: $(\|s\vec{x}\| = \|s\|\|\vec{x}\|) \wedge (\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|) \wedge \left(\|\vec{x}\| \geq 0;\ \|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}\right)$
Funktional f	Sei V ein Vektorraum über den Körper $\mathbb{K}$. V kann auch ein Funktionenraum sein. Ein Funktional $f: V \to \mathbb{K}$ nimmt einen Vektor aus V als Input, und liefert einen Skalar $\in \mathbb{K}$ als Output
Lineares Funktional (LF)	f ist ein *Lineares Funktional* (LF) auf V, wenn: $f: V \to \mathbb{K}$: $\mathrm{f}(\lambda x + \mu y) = \lambda\, \mathrm{f}(x) + \mu\, \mathrm{f}(y)\ \ \forall x, y \in V;\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
Beschränktes LF	Ein LF auf dem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt *beschränkt,* wenn $\exists K > 0$: $\|\mathrm{f}(x)\| \leq K\|x\|\ \forall x \in V$
Operator F	Sei V ein Funktionenraum. Ein Operator $F: V \to U$ ist eine Abbildung zwischen den Funktionenräumen V und U
Linearer Operator (LO)	Seien$(V, \|\cdot\|_V)$ und $(U, \|\cdot\|_U)$ normierte (Funktionen)räume über $\mathbb{K}$. F ist ein *Linear Operator* (LO) auf V, wenn: $F: V \to U$: $\mathrm{F}(\lambda x + \mu y) = \lambda F + \mu\, \mathrm{F}(y)\ \ \forall x, y \in V;\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
Beschränkter LO	Ein LO $F: V \to U$ heißt *beschränkt,* wenn $\exists K > 0$: $\|\mathrm{F}(x)\|_U \leq K\|x\|_V\ \forall x \in V$
Prähilbertraum	Ein Vektorraum, in dem ein inneres Produkt definiert ist $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, heißt *Prähilbertraum*. Damit es ein inneres Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ geben kann, muss im Raum die Norm $\|\cdot\|_2$ definiert sein, bzw. das Innere Produkt *induziert* die Norm: $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}\ \ \forall x \in V$. Für $\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ spricht man auch von einem *euklidischen Raum*, für $\mathbb{K}$=$\mathbb{C}$ von einem *unitären Raum*. In einem Prähilbertraum ist *„Orthogonalität“* x⊥y definiert ($x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$), und es existieren *Orthonormalbasen*.
Inneres Produkt	Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Das innere Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle: V \times V \to \mathbb{K}$ muss folgende Eigenschaften haben: - Linearität im ersten Argument: $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle\ \ \forall x, y, z \in V;\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ (für $\langle x, y\rangle = \sum \bar{x}_i y_i$) - Hermite-Eigenschaft: $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}\ \ \forall x, y \in V$ - Definitheit: $\langle x, x\rangle \geq 0\ \forall x \in V\ \wedge\ \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Aus Linearität im ersten Argument und Hermite-Eigenschaft folgt konjugierte Linearität im zweiten Argument: $\langle z, \lambda x + \mu y\rangle = \bar{\lambda}\langle z, x\rangle + \bar{\mu}\langle z, y\rangle\ \ \forall x, y, z \in V;\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
Hilbertraum	Ein vollständiger Prähilbertraum $(\bar{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt Hilbertraum H. Für alle $x, y \in H$ gibt es Folgen $(x_n), (y_n)$, die gegen x bzw. y konvergieren. $\Rightarrow \boldsymbol{\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle}$.