# Merkzettel „Vektoren und Matrizen“

*24.05.2024*

## Vektoren in $\mathbb{R}^2$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Gerade Parameter-darstellung: | $g: \vec{X} = \overrightarrow{0A} + s\vec{a}$ | Normal-vektor-form: | $g: \vec{n} \cdot \vec{X} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{0P}$ | $Normalvektor\ ablesen\ aus\ ax + by = c\ \rightarrow\ \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ |
| Hessische Abstands-formel: | $\mathrm{d}(P,g) = \lvert \overrightarrow{A_gP} \cdot \vec{n}_0 \rvert = \frac{\lvert \overrightarrow{A_gP} \cdot \vec{n} \rvert}{\lvert \vec{n} \rvert}$ | Fläche Parallelogramm: $A = \lvert \vec{a} \times \vec{b} \rvert$ | | $Normalvektor\ ablesen\ aus\ Richtungsvektor\ \vec{a}$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \vec{n}_l = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix};\ \vec{n}_r = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ |

## Vektoren in $\mathbb{R}^3$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ebene Parameter-darstellung: | $\varepsilon: \vec{X} = \overrightarrow{0A} + s\vec{a} + t\vec{b}$ | $Normalvektor\ \vec{n}_\varepsilon\ ablesen\ aus\ ax + by + cz = c \rightarrow \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, oder: \vec{n}_\varepsilon = \vec{a} \times \vec{b}$ | |
| Hessische Abstands-formel: | $\mathrm{d}(g,\varepsilon) = \lvert \overrightarrow{A_gP_\varepsilon} \cdot \vec{n}_0 \rvert = \frac{\lvert \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \rvert}{\lvert \vec{n} \rvert}$ | Winkel $\vec{a}, \varepsilon$: | $\varphi = 90° - \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert \vec{a} \rvert \cdot \lvert \vec{b} \rvert} = 90° - \arccos(\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0)$ |
| Kreuzprodukt („äuß. Prod.“) | $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_yb_z - a_zb_y \\ -(a_xb_z - a_zb_x) \\ a_xb_y - a_yb_x \end{pmatrix}$ | $\lvert \vec{a} \times \vec{b} \rvert = \lvert \vec{a} \rvert \cdot \lvert \vec{b} \rvert \cdot \sin\alpha\,;$ $wenn\ \lvert \vec{a} \times \vec{b} \rvert = 0, dann\ sind\ \vec{a}\ und\ \vec{b}\ parallel$ | |
| Schneide Ebene/Gerade | $\varepsilon = g \Rightarrow \overrightarrow{0A}_\varepsilon + s\vec{a}_\varepsilon + t\vec{b}_\varepsilon = \overrightarrow{0A}_g + s\vec{a}_g \Rightarrow$ GLS lösen | | |

## Vektorrechnung in $\mathbb{R}^n$ allgemein

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Skalarprodukt („kanon. inn. Produkt“) | $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = \vec{x}^T\, I\, \vec{y}$ | $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lVert \vec{a} \rVert \cdot \lVert \vec{b} \rVert \cdot \cos\alpha$ $wenn\ \lvert \vec{a} \cdot \vec{b} \rvert = 0 \rightarrow\ \vec{a}\ \perp \vec{b}$ | $Linearität: (\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z};\ \ (s\vec{x}) \cdot \vec{y} = s(\vec{x} \cdot \vec{y});$ $Symetrie: \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x};$ $positive\ Definitheit: \vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0; \vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$ | | |
| Euklid. Norm („Länge“): | $\left\lvert \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \right\rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ | Winkel $\vec{x}, \vec{y}$: | $\varphi = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\lVert \vec{x} \rVert \cdot \lVert \vec{y} \rVert} = \arccos(\vec{x}_0 \cdot \vec{y}_0)$ | p-Norm: | $\lVert \vec{x} \rVert_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i \rvert^p}$ |
| | | | | 1er-Norm: | $\lVert \vec{x} \rVert_1 = \sum_{i=1}^{n} \lvert x_i \rvert$ |
| Skalare Pro-jektion a→ b: | $\lVert \vec{a}_{\vec{b}} \rVert = \vec{a} \cdot \vec{b}_0 = \vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{\lVert b \rVert}$ | Vektorprojektion a→ b = $\vec{a}_{\vec{b}}$ | $\vec{a}_{\vec{b}} = \lVert \vec{a}_{\vec{b}} \rVert \vec{b}_0 = \left(\vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{\lVert b \rVert}\right) \frac{\vec{b}}{\lVert b \rVert} = \left(\vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{\lVert b \rVert^2}\right) \vec{b}$ | Reflexion v. $\vec{u}$ an Ebene $\vec{n}$ | $\vec{u}_a = \vec{u} - 2\vec{u}_{\vec{n}}$ |
| Sonstiges: | $\lVert s\vec{v} \rVert = s \lVert \vec{v} \rVert;\ \ Einheitsvektor\ \vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{\lVert a \rVert};\ \ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A};\ \ Halbierungspunkt\ H = \frac{A-B}{2};\ \ Gerade: \vec{X} = \overrightarrow{0A} + t \cdot \vec{a}$ | | | | |

## Vektoren in allgemeinen linearen Vektorräumen

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Linearer Vektorraum: | $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u};\ (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w});\ \vec{u} + \vec{0} = \vec{u};\ \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0};$ $(st)\vec{v} = s(t\vec{v});\ (s+t)\vec{v} = s\vec{v} + t\vec{v};\ s(\vec{u} + \vec{v}) = s\vec{u} + s\vec{v}; 1\vec{v} = \vec{v}$ | | | | | | |
| Euklid. Vektor-raum (V,⟨·,·⟩): | Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit def. Innerem Prod.: | $Linearität: \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle;\ \langle s\vec{u}, \vec{v} \rangle = s\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle;\ Symetrie: \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle;$ $pos. Definitheit;\ \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0;\ \ \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ | | | | | |
| Norm. Vektor-raum (V, ‖ · ‖): | Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit definierter Norm | $V \rightarrow \mathbb{R}_0^+: \vec{x} \rightarrow \lVert \vec{x} \rVert: (\lVert s\vec{x} \rVert = \lvert s \rvert \lVert \vec{x} \rVert) \wedge (\lVert \vec{x} + \vec{y} \rVert \leq \lVert \vec{x} \rVert + \lVert \vec{y} \rVert) \wedge (\lVert \vec{x} \rVert \geq 0;\ \ \lVert \vec{x} \rVert = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0})$ | | | | | |
| Euklidische Norm (Länge): | $\lVert \vec{x} \rVert_2 = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ | Abstand: | $\mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y}) = \lVert \vec{x} - \vec{y} \rVert_2$ | Winkel: | $\varphi = \arccos \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\lVert \vec{x} \rVert_2 \lVert \vec{y} \rVert_2}$ | Cauchy-Schwarz: | $\lvert \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \rvert \leq \lVert \vec{x} \rVert_2 \lVert \vec{y} \rVert_2$ |
| Dreiecksungl.: | $\vec{u}, \vec{v} \in V, (V, \lVert \cdot \rVert): \lVert \vec{u} + \vec{v} \rVert \leq \lVert \vec{u} \rVert + \lVert \vec{v} \rVert;\ \ \lvert \lVert \vec{u} \rVert - \lVert \vec{v} \rVert \rvert \leq \lVert \vec{u} - \vec{v} \rVert$ | Pythagoras: | $\vec{x} \perp \vec{y}: \lVert \vec{x} + \vec{y} \rVert_2^2 = \lVert \vec{x} \rVert_2^2 + \lVert \vec{y} \rVert_2^2$ | | | | |
| Lin. unabhängig | $s_1\vec{v}_1 + s_2\vec{v}_2 + \cdots + s_k\vec{v}_k = \vec{0} \Longrightarrow wenn\ w.A. nur\ mit\ allen\ s_k = 0, dann\ ist\ \vec{v}_1 \ldots \vec{v}_k\ l.u. (\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_k \neq \vec{0})$ | | | | | | |
| Unterraum | $(U \subseteq V) \wedge (\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in U \Longrightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in U) \wedge (\vec{v} \in U \Longrightarrow s\vec{v} \in U)$ | $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$ | | | | | |
| Direkte Summe | $V = U \oplus W \Leftrightarrow (V = U + W) \wedge (\,U \cap W = \{\vec{0}\})$ | | | | | | |
| Gram-Schmidt | $Geg.: B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\};\ \vec{w}_1 = \vec{b}_1;\ \vec{w}_2 = s_{21}\vec{w}_1 + \vec{b}_2;\ \ \vec{w}_3 = s_{31}\vec{w}_1 + s_{32}\vec{w}_2 + \vec{b}_3;\ \ s_{ij} = -\frac{\langle b_i, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle};\ \ \vec{c}_i = \frac{\vec{w}_i}{\lVert \vec{w}_i \rVert}$ | | | | | | |
| Orthogonalbas.: | $B\ ist\ OGB, wenn\ \langle b_i, b_j \rangle = 0: \forall i \neq j$ | Orthonormalbasis: | $B\ ist\ ONB, wenn\ \langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$ | In ONB: $\langle \vec{x}, \vec{b}_i \rangle = x_i$ | | | |

## Matrixmultiplikation

| | | |
|---|---|---|
| Produkt $A\cdot\vec{x}$ (Matrix mal Vektor) $(Drehstreckung\ von\ \vec{x})$ | *Bedingung: Spalten Matrix= Elemente Vektor* | $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ |
| | $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}$ | $\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\end{pmatrix}$ |
| Produkt $A\cdot B$ (Matrix mal Matrix) $(\text{i. A.}: A\cdot B\neq B\cdot A)$ | *Bedingung: Spalten A= Zeilen B* | $\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\end{bmatrix}$ |
| | $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{bmatrix}$ |

## Allgemeine $m_x n$-Matrizen bzw. Abbildungen (m…Zeilen, n…Spalten)

| | | | |
|---|---|---|---|
| Rang(A)= dim(Bild(A)) | $\begin{bmatrix}x&x&x\\x&x&x\\x&x&x\end{bmatrix}\xrightarrow{Gauss}\begin{bmatrix}x&x&x\\0&x&x\\0&0&x\end{bmatrix}: Rang=\#Zeilen\neq 0$ | Rang = # linear unabhängiger Zeilenvektoren = # linear unabhängiger Spaltenvektoren | |
| Basis(Bild(A)) | $\begin{bmatrix}\vert&\vert&\vert\\ [\vec{a}_1]&[\vec{a}_2]&[\vec{a}_3]\\ \vert&\vert&\vert\end{bmatrix}\xrightarrow{Gauss}\begin{bmatrix}x&x&x\\0&x&x\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow Basis(B(A))=\mathcal{L}(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ | | |
| Basis(Kern(A)) | $\begin{bmatrix}x&x&x&x\\x&x&x&x\\x&x&x&x\end{bmatrix}\xrightarrow{Gauss}\begin{bmatrix}1&0&a&b\\0&1&c&d\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{ergänzen}\begin{bmatrix}1&0&a&b\\0&1&c&d\\0&0&X&0\\0&0&0&X\end{bmatrix}\Rightarrow Basis(K(A))=\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}-a\\-c\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-b\\-d\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ | $Kern$: $\forall\vec{x}: A\vec{x}=\vec{0}$ | |
| $[\vec{v}]_E\rightarrow[\vec{v}]_B$ | $[B\mid[\vec{v}]_E]\xrightarrow{Gauss}[I\mid[\vec{v}]_B];\ oder: [\vec{v}]_B=T_{B\leftarrow E}[\vec{v}]_E=B^{-1}[\vec{v}]_E$ | $[\vec{v}]_B\rightarrow[\vec{v}]_E$: | $[\vec{v}]_E=T_{E\leftarrow B}[\vec{v}]_B=B[\vec{v}]_B$ |
| $[\varphi(E)]_E\rightarrow[\varphi(E)]_B$ | $[B\mid[\varphi(E)]_E]\xrightarrow{Gauss}[I\mid[\varphi(E)]_B];\ oder: [\varphi(E)]_B=T_{B\leftarrow E}\,[\varphi(E)]_E=B^{-1}[\varphi(E)]_E$ | | |
| $[\varphi(E)]_E\rightarrow[\varphi(B)]_B$ | $\left[\begin{matrix}\vert&\vert&\vert\\ \vec{b}_1&\vec{b}_2&\cdots\\ \vert&\vert&\vert\end{matrix}\,\middle\vert\,\begin{matrix}\vert&\vert&\vert\\ [\varphi(\vec{b}_1)]_E&[\varphi(\vec{b}_2)]_E&\cdots\\ \vert&\vert&\vert\end{matrix}\right]\xrightarrow{Gauss}[I\mid[\varphi(B)]_B];\ oder: [\varphi(B)]_B=T_{B\leftarrow E}\,[\varphi(E)]_E\,T_{E\leftarrow B}=B^{-1}[\varphi(E)]_E\,B$ | | |
| $[\varphi(B)]_E\rightarrow[\varphi([\vec{x}]_E)]_B$ | $[\varphi([\vec{x}]_E)]_B=T_{B\leftarrow E}\,[\varphi(B)]_E\,T_{B\leftarrow E}\,[\vec{x}]_E=B^{-1}\,[\varphi(B)]_E\,B^{-1}\,[\vec{x}]_E$ | | |
| $[\varphi(B)]_B\rightarrow[\varphi(C)]_C$ | $[\varphi(C)]_C=T_{C\leftarrow B}\,[\varphi(B)]_B\,T_{B\leftarrow C}=\begin{bmatrix}\vert&\vert&\vert\\ [\vec{b}_1]_C&[\vec{b}_2]_C&\cdots\\ \vert&\vert&\vert\end{bmatrix}[\varphi(B)]_B\begin{bmatrix}\vert&\vert&\vert\\ [\vec{c}_1]_B&[\vec{c}_2]_B&\cdots\\ \vert&\vert&\vert\end{bmatrix}$ | | |
| $U=\mathcal{L}\{\vec{u},\vec{v}\}\rightarrow$ Basis$(U^{\perp})$ | $z.B. U\in\mathbb{R}^3$: Basis$(U^{\perp})=$ Basis$\left(\text{Kern}\left(\begin{bmatrix}-&\vec{u}^T&-\\-&\vec{v}^T&-\\0&0&0\end{bmatrix}\right)\right)$q | | |
| Natürliche Matrixnorm | $\Vert A\Vert_\rho=\max\limits_{\vec{x}\neq\vec{0}}\left(\frac{\Vert A\vec{x}\Vert_\rho}{\Vert\vec{x}\Vert_\rho}\right)=\max\limits_{\Vert\vec{x}\Vert_\rho=1}(\Vert A\vec{x}\Vert)$ | 1-Norm: $\Vert A\Vert_1=\max\limits_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{m}\vert a_{ij}\vert$ | (größte Spalten-betragssumme) |
| Spektralnorm | $\Vert A\Vert_2=\sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$ | Maximum-Norm: $\Vert A\Vert_\infty=\max\limits_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}\vert a_{ij}\vert$ | (größte Zeilen-betragssumme) |

## Quadratische $n_x n$-Matrizen

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\det\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-b_1a_2$ | $\det\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{matrix}a_1b_2c_3+\\b_1c_2a_3+\\c_1a_2b_3-\\c_1b_2a_3-\\c_2b_3a_1-\\c_3b_1a_2\end{matrix}=\begin{matrix}a_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix}+\\b_1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_2&c_2\\a_3&c_3\end{vmatrix}+\\c_1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}\end{matrix}$ | $(A+B)^T=A^T+B^T$<br>$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$<br>$\det(sA)=s^n\det(A)$<br>$\det(AB)=\det(A)\det(B)$ | $\det(A^T)=\det(A)$<br>$A^{p+q}=A^p\cdot A^q$ |
| regulär: | $Rang(A)=n\Leftrightarrow Kern(A)=\vec{0}\Leftrightarrow A\vec{x}=\vec{0}\ hat\ nur\ Lsg.\ \vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\det\vert A\vert\neq 0\Leftrightarrow\forall\lambda\neq 0\Leftrightarrow\exists: A^{-1}$ | singulär: ¬regulär | |
| invertierbar: | $\exists B: AB=I\ \Leftrightarrow regulär$ | Invertieren: $[A\vert I]\xrightarrow{Gauss}[I\vert A^{-1}]$ | |
| diag.sierbar: | $\exists T: T\,A\,T^{-1}=D\Leftrightarrow\exists\ Eigenbasis\ D: A=X\,D\,X^{-1}\Leftrightarrow\forall\lambda: algebr.Vielfachheit\ n=geom.Vielfachheit\ g$ | | |
| symetrisch: | $A^T=A\Leftrightarrow EV\ bilden\ OGB\Leftrightarrow\exists: OGB\ D: V^T\,A\,V=D$ | $sym.\Rightarrow wenn\ A\in\mathbb{R}^{nxn}: \forall\lambda\in\mathbb{R}.;\ sym.\Rightarrow diagonalisierbar$ | |
| orthogonal | $A^T=A^{-1}\Leftrightarrow A\,A^T=I\Leftrightarrow\Vert\vec{x}\Vert=\Vert A\vec{x}\Vert$ | $orthogonal\Rightarrow\det(A)=\pm 1; orthogonal\Rightarrow\forall\lambda=\pm 1$ | |
| Definit | $q(\vec{x})=\vec{x}^TA\vec{x}$. Wenn $q(\vec{x})>(\geq)\ 0\ \forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n\backslash\{\vec{0}\}\Rightarrow$ positiv (semi)definit. Wenn $q(\vec{x})<(\leq)\ 0\Rightarrow$ negativ (semi)definit. | | |
| Hauptmin.krit | $\det(M_k)>0, k=1\ldots n\Rightarrow pos.definit.;\ \ \text{sgn}(\det(M_k))=(-1)^k, k=1\ldots n\Rightarrow neg.definit$ | | |
| EW $\lambda$, EV $\vec{v}$ | $A\vec{v}=\lambda\vec{v};\ Eigenvektor\ \vec{v}\in\mathbb{C}^n\backslash\{\vec{0}\}; Eigenwert\ \lambda\in\mathbb{C}. Wenn\ A\in\mathbb{R}^{nxn}\wedge pos.definit\Rightarrow\forall\lambda\in\mathbb{R}\wedge\forall\lambda>0.$ | | |
| Berechnung EW und EV | EW: $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0$; EV: $\vec{v}_{1\ldots n}\in$ Eigenraum$(\lambda_i)=$ Kern$(A-\lambda_iI)$ | | |
| Jordan | $A=X\,J\,X^{-1};\ \ z.B: \lambda_1: n=2; g=1:\ J=\begin{bmatrix}\lambda_1&1&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_2\end{bmatrix};\ X=\begin{bmatrix}\vert&\vert&\vert\\ \vec{v}_1&\vec{h}_1&\vec{v}_2\\ \vert&\vert&\vert\end{bmatrix}$ | | |

## Gleichungssysteme

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A\vec{x}=\vec{b}$ lösbar: | $\mathrm{Rang}(A\mid\vec{b})=\mathrm{Rang}(A)\iff\vec{b}\in\mathrm{Bild}(A)\iff\vec{b}\cdot\vec{z}=0\colon\forall\vec{z}\in\mathrm{Kern}(A^T)$ | $\nexists$Lsg.: | $\mathrm{Rang}(A\mid\vec{b})\neq\mathrm{Rang}(A)$ |
| $A\vec{x}=\vec{b}$; $\exists$1Lsg.: | $\mathrm{Rang}(A\mid\vec{b})=\mathrm{Rang}(A)=n\iff\det(A)\neq 0$ | $\exists\infty$Lsg.: | $\det(A)\neq 0\wedge\mathrm{Rang}(A\mid\vec{b})=\mathrm{Rang}(A)$ |

## Lösen von 3x3 Gleichungssystemen mit der Cramer-Regel:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\begin{aligned}a_1x+b_1y+c_1z&=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z&=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z&=d_3\end{aligned}$ | $D=\det\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$ | $D_x=\det\begin{vmatrix}d_1&b_1&c_1\\d_2&b_2&c_2\\d_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$ | $D_y=\det\begin{vmatrix}a_1&d_1&c_1\\a_2&d_2&c_2\\a_3&d_3&c_3\end{vmatrix}$ | $D_z=\det\begin{vmatrix}a_1&b_1&d_1\\a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\end{vmatrix}$ | $x=\frac{D_x}{D}$ $y=\frac{D_y}{D}$ $z=\frac{D_z}{D}$ |

## Differenzialgleichungssysteme

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\dot{\vec{x}}(t)=\boldsymbol{A}\vec{x}(t)+\vec{f}(t)$ | EW: $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0$ | | EV: $\vec{v}_{1\ldots n}\in\mathrm{Eigenraum}(\lambda_i)=\mathrm{Kern}(A-\lambda_i I)$ | | Wenn n<g, HV: $(A-\lambda_i I)\vec{h}=\vec{v}_i$ | |
| Homogene Lösung: | Für jeden EV zu $\lambda_i\in\mathbb{R}$: | $\vec{y}_h=c_i e^{\lambda_i t}\vec{v}_i$ | Für jeden 1. HV zu $\lambda_i\in\mathbb{R}$: | $\vec{y}_h=c_i e^{\lambda_i t}(\vec{h}+t\vec{v}_i)$ | | |
| | Für jeden EV $\vec{v}_{ij}=\vec{a}\pm i\vec{b}$ zu $\lambda_{ij}=\alpha\pm i\beta$: | $\vec{y}_h=c_i e^{\alpha t}(\vec{a}\cos\beta t-\vec{b}\sin\beta t)+c_j e^{\alpha t}(\vec{b}\cos\beta t+\vec{a}\sin\beta t)$ | | | | |
| Partikuläre Lösung | $\vec{f}(t)=\vec{a}\,{\sin\atop\cos}\,\omega t$: | $\vec{y}_p=\vec{a}\sin\omega t+\vec{b}\cos\omega t$ | $\vec{f}(t)=\vec{\alpha}+\vec{\beta}t+\vec{\gamma}t^2+\cdots$ | $\vec{y}_p=\vec{a}+\vec{b}t+\vec{c}t^2+\cdots$ | $\vec{f}(t)=\vec{\alpha}e^{\omega t}$ | $\vec{y}_p=\vec{a}e^{\omega t}$ |
| $\boldsymbol{B}\ddot{\vec{y}}(t)+\boldsymbol{C}\vec{y}(t)=\vec{k}(t)$ | $p(\lambda)=\det(C-\lambda B)=0$ | | $\vec{q}_{1\ldots n}\in\mathrm{Kern}(C-\lambda_i B)$ | $\mu_{1\ldots n}=\sqrt{\lambda_{1\ldots n}}$ | | |
| Hom. Lsg.: | Für jedes $\vec{q}_i$ zu $\lambda_i\in\mathbb{R}$: | $\vec{y}_h=\vec{q}_i(\alpha_i\cos\mu t+\beta_i\sin\mu t)$ | | | | |
| Part.ikuläre Lösung: | $\vec{k}(t)=\vec{\alpha}\sin\omega t\,;\ \omega\neq\mu_i$ | $\vec{y}_p=\vec{a}\sin\omega t$ | $\vec{k}(t)=\vec{\alpha}\sin\omega t\,;\ \omega=\mu_i$ | $\vec{y}_p=\vec{a}t\sin\omega t$ | | |
| | $\vec{k}(t)=\vec{\alpha}\cos\omega t\,;\ \omega\neq\mu_i$ | $\vec{y}_p=\vec{a}\cos\omega t$ | $\vec{k}(t)=\vec{\alpha}\cos\omega t\,;\ \omega=\mu_i$ | $\vec{y}_p=\vec{a}t\cos\omega t$ | $\vec{k}(t)=\vec{\alpha}e^{\omega t}$: | $\vec{y}_p=\vec{a}e^{\omega t}$ |