Helmuts Kochrezept Nummer 3:

Der Satz von Stokes

(Version 2, 21.12.2019)

Dieses „Kochrezept" erklärt Dir, wie du den Satz von Stokes anwendest.

1 Satz von Stokes

Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$ in $\mathbb{R}^3$, beispielsweise in kartesischen Koordinaten $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$. Weiters nehmen wir an, wir hätten eine beliebige Fläche S im Raum, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- Sie ist „berandet"; d.h. sie hat einen Rand ∂S (ist also nicht geschlossen). Ein Beispiel für eine solche Fläche wäre eine Halbkugel, deren Rand ∂S ein Kreis ist.
- Sie ist „orientierbar". Das heißt an Sonderbarkeiten wie z.B. Möbiusbänder wollen wir erst gar nicht denken.

Der Satz von Stokes besagt nun, dass das Flächenintegral von $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ über eine solche Fläche S dasselbe ergibt wie das Kurvenintegral von $\vec{v}$ über den Rand ∂S:

$$\int_S \left[\vec{\nabla} \times \vec{F}\right](\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial S} \vec{F}(\vec{r})\, dr \tag{1}$$

Hinweis: Die Schreibweise $\left[\vec{\nabla} \times \vec{F}\right](\vec{r})$ soll folgendes ausdrücken: Will man die linke Seite von Gleichung (1), also das Flächenintegral $\int_S \left[\vec{\nabla} \times \vec{F}\right](\vec{r}) \cdot d\vec{A}$ ausrechnen, dann soll man *zuerst* die Rotation von $\vec{F}$ bilden. Damit bilden wir de facto ein *neues* Vektorfeld, dass wir z.B. auch $\vec{\mathrm{v}}(\vec{r})$ nennen könnten (mit $\vec{\mathrm{v}}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}$), und können dann anschreiben.

$$I = \int_S \vec{\mathrm{v}}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} \tag{2}$$

Erst *danach* setzt man im weiteren Verlauf der Rechnung die parametrisierte Fläche S in $\vec{\mathrm{v}}(\vec{r})$ ein.

2 Integrationsrichtung

Damit der Satz von Stokes richtig funktioniert, muss folgende Regel beachtet werden: Wenn man sich vorstellt, ein kleines Männchen wandert den Rand ∂S in die gewählte Integrationsrichtung entlang, dann liegt die „Außenseite" der Fläche stets links vom Männchen. Die „Außenseite" der Fläche ist dabei die Seite, von der der Normalvektor stets weg zeigt, wie die folgenden zwei Abbildungen verdeutlichen.

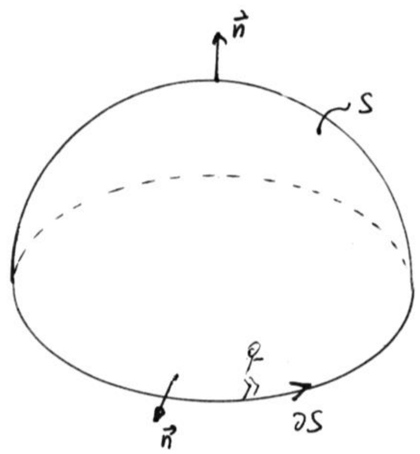

Abbildung 1: So stimmen beim Satz von Stokes Linien- und Flächenintegral überein (Beispiel 1): Wenn wir über den Rand ∂S z.B. in positiver Umlaufrichtung (gegen den Uhrzeigersinn) integrieren, dann läuft das Männchen in positiver Umlaufrichtung (gegen den Uhrzeigersinn) am Rand der Fläche S entlang, die hier wie ein Hügel geformt ist. Die „positive" Seite der Fläche liegt dann immer links vom Männchen und ist somit „die Hügelaußenseite". Die Normalvektoren zeigen vom Hügel weg.

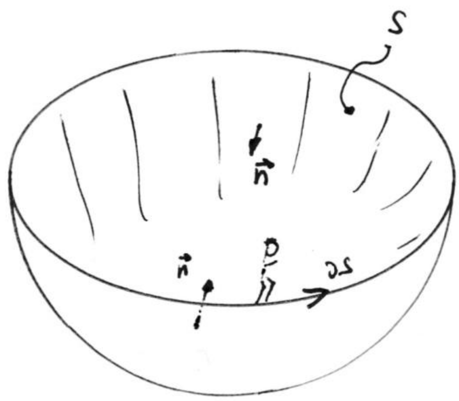

Abbildung 2: So stimmen beim Satz von Stokes Linien- und Flächenintegral überein (Beispiel 2): Wenn wir über den Rand ∂S z.B. in positiver Umlaufrichtung (gegen den Uhrzeigersinn) integrieren, dann läuft das Männchen in positiver Umlaufrichtung (gegen den Uhrzeigersinn) am Rand der Fläche S entlang, die hier wie ein Schüssel geformt ist. Die „positive" Seite der Fläche liegt dann immer links vom Männchen und ist somit „das Innere der Schüssel". Die Normalvektoren zeigen „in die Schüssel hinein". Wollte man hier „den Fluss nach außen" mittels Satz von Stokes über das Kurvenintegral ∂S berechnen, dann müsste man über den Rand ∂S in die umgekehrte Richtung (im Uhrzeigersinn) integrieren.

3 Überprüfung an Hand eines Beispiels

3.1 Angabe

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{\mathrm{F}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -yz \\ -z^2 \\ -3z \end{pmatrix} \tag{3}$$

und die berandete Fläche $z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1$.

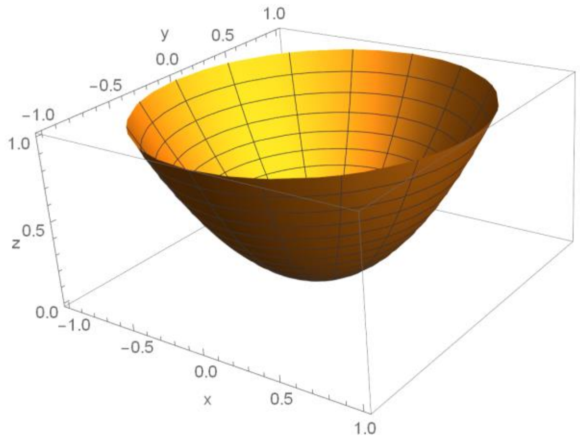

Abbildung 3: Die berandete Fläche $z = x^2 + y^2; \;\; 0 \leq z \leq 1$.

3.2 Flächenintegral

Wir berechnen zunächst $\vec{\mathrm{v}}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}$:

$$\vec{\mathrm{v}}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -yz \\ -z^2 \\ -3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} 3z + \frac{\partial}{\partial z} z^2 \\ \frac{\partial}{\partial x} 3z - \frac{\partial}{\partial z} yz \\ -\frac{\partial}{\partial x} 3z^2 + \frac{\partial}{\partial y} yz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -y \\ z \end{pmatrix} \tag{4}$$

Wir ersetzen also in im Integral (1) den Ausdruck $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ durch dieses $\vec{\mathrm{v}}(\vec{r})$, und erhalten:

$$I = \int_S \vec{\mathrm{v}}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \int_S \begin{pmatrix} 2z \\ -y \\ z \end{pmatrix} \cdot d\vec{A} \tag{5}$$

Der weitere Rechenweg zur Lösung dieses Flächenintegrals ist in „Helmuts Kochrezept Nr. 001“ detailliert dargestellt (Downloadlink http://www.goldsilberglitzer.at/Rezepte/Rezept001.pdf).

Die Rechnung liefert als Ergebnis schließlich:

$$I = \pi \tag{6}$$

3.3 Kurvenintegral

Setzen wir das gegebene Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$ in die rechte Seite der Gleichung (1) (das Kurvenintegral) ein, erhalten wir:

$$\mathrm{I} = \oint_{\partial S} \begin{pmatrix} -yz \\ -z^2 \\ -3z \end{pmatrix} dr \tag{7}$$

Der weitere Rechenweg ist in „Helmuts Kochrezept Nr. 002“ detailliert dargestellt (Downloadlink http://www.goldsilberglitzer.at/Rezepte/Rezept002.pdf).

Die Rechnung liefert als Ergebnis schließlich ebenfalls:

$$I = \pi \tag{8}$$

4 Anwendung

- Will man ein Flächenintegral $\int_S \vec{\mathrm{v}}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$ berechnen, und $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{0}$, dann gibt es ein Vektorfeld $\vec{F}$, so dass $\vec{\mathrm{v}}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r})$. Damit lässt sich gemäß Gleichung (1) das Flächenintegral auch als Linienintegral $\oint_{\partial S} \vec{F}(\vec{r})\, dr$ ausrechnen[1].
- Ist $\vec{F}(\vec{r})$ ein Potentialfeld, d.h. ist $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$, dann ist das geschlossene Integral über die Randkurve ∂S gleich Null, und somit auch das Flächenintegral über die Fläche S gleich null.
- Ist S' eine andere Fläche mit derselben Randkurve ∂S wie Fläche S, dann ist es egal, über welche Fläche integriert wird:

$$\int_S [\vec{\nabla} \times \vec{F}](\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \int_{S'} [\vec{\nabla} \times \vec{F}](\vec{r}) \cdot d\vec{A} \tag{9}$$

[1] Zusätzliche Voraussetzung ist, dass das Integrationsgebiet G „sternförmig“ ist, d.h. dass es in G einen Punkt $\vec{x}_0$ gibt, von dem aus alle anderen Punkte des Gebiets mit einer geraden Verbindungsstrecke erreichbar sind.