Helmuts Kochrezept Nummer 7:

Der Plattenkondensator mit Batterie und das verflixte Vorzeichen bei der Energie.

(Version 2, 05.06.2019)

Dieses „Kochrezept" erklärt dir, wie du zwei typische Plattenkondensator-Beispiele rechnest, bei denen eine Batterie am Kondensator angeschlossen ist und der Plattenabstand verändert wird. Oft gibt es bei solchen Beispielen Konfusionen, wie das Vorzeichen der verschiedenen Energieanteile (bzw. der mechanische Arbeit) anzusetzen ist, und wie die jeweiligen Energieanteile überhaupt berechnet werden. Dieses „Kochrezept" versucht diese Fragen auf leicht verständliche Art umfassend zu klären.

In diesem Dokument werden SI-Einheiten verwendet. Für cgs-Einheiten ersetze einfach ε_0 durch $\frac{1}{4\pi}$.

1 Ein Plattenkondensator wird mit einer Batterie geladen. Dann wird diese abgehängt und die Platten werden verschoben.

1.1 Aufgabe

Wir betrachten das in Abbildung 1 dargestellte Beispiel: Ein Plattenkondensator mit sehr großen, parallelen Platten im Abstand d_0 wird zunächst mittels einer Batterie der Spannung U_0 vollständig aufgeladen. Dann wird die Batterie abgehängt, und die Platten werden auf den Abstand d_1 verschoben.

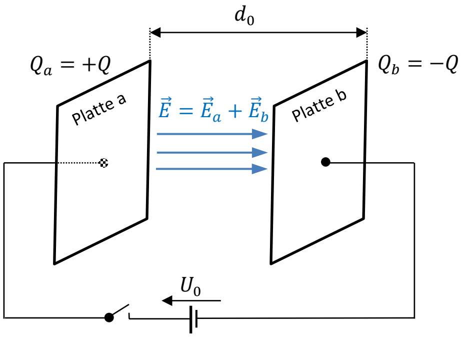

Abbildung 1: Ein Plattenkondensator wird geladen. Dann wird die Batterie abgehängt und der Plattenabstand geändert.

Wir wollen folgende Frage beantworten:

- Welche mechanische Arbeit W_{mech} wird geleistet, wenn die Platten von d_0 auf d_1 verschoben werden.
- Welche Energiedifferenz ΔW_{EL} im elektrischen Feld des Kondensators ergibt sich durch die Plattenverschiebung?

1.2 Ansatz

Nehmen wir einmal (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) an, dass $d_1 > d_0$, also dass wir die Platten auseinanderziehen. Die beiden Platten sind gegengleich geladen, ziehen also einander an. Um sie auseinanderzuziehen, müssen wir also *am System die mechanische Arbeit W_{mech} verrichten* und somit dem Gesamtsystem Energie zuführen. Wir befolgen folgende Konvention: Wenn wir *am System mechanische Arbeit verrichten* (wir uns „anstrengen" müssen), dann ist $W_{mech} > 0$.

> Anmerkung: Würden wir die Platten näher zueinander bringen ($d_1 < d_0$), dann würden wir sogar Energie gewinnen (die gegengleich geladenen Platten ziehen einander ja an, und bewegen sich „von selber", sobald wir eine der Platten aus der Verankerung lösen). Es würde *vom System mechanische Arbeit verrichtet werden*, und dann wäre gemäß unserer Konvention $W_{mech} < 0$.

Wir nehmen aber an, dass wir die Platten auseinander bewegen. Die mechanische Arbeit $W_{mech} > 0$, die wir im Fall $d_1 > d_0$ in das System hineinstecken, erhöht dann die im Gesamtsystem gespeicherte Energie W_{syst} um den Wert ΔW_{syst}.

$$\Delta W_{syst} = W_{mech} \tag{1}$$

Das „Gesamtsystem" ist sehr überschaubar (die Batterie ist ja abgehängt). Die zugeführte mechanische Energie kann offenbar nur in der Energie des elektrischen Feldes W_{EL} gespeichert werden. Daher gilt $\Delta W_{syst} = \Delta W_{EL}$. Eingesetzt in (1):

$$\Delta W_{EL} = W_{mech} \tag{2}$$

1.3 Änderung der Energie im elektrischen Feld

Für die im elektrischen Feld eines Kondensators gespeicherte Energie gilt: $W_{EL} = \frac{Q^2}{2C}$ *(Anmerkung: Die beiden Platten sind gegengleich mit $+Q$ und $-Q$ geladen. Das heißt, die Ladung der beiden Platten unterscheidet sich zwar im Vorzeichen, ist aber betragsmäßig gleich. Das Q in dieser Formel ist genau dieses betragsmäßige Q, das für beide Platten gilt, und nicht etwa eine Ladungsdifferenz $2Q$, wie manchmal fälschlicherweise angenommen wird)*. Es gilt daher:

$$\Delta W_{EL} = W_{EL}^{(1)} - W_{EL}^{(0)} = \frac{Q_1^2}{2C_1} - \frac{Q_0^2}{2C_0} \tag{3}$$

Im aktuellen Beispiel wird die Batterie nach dem Aufladen des Kondensators abgehängt. Die Ladungen können also „nirgendwo hin", wenn wir den Plattenabstand verändern. Ladungserhaltung gilt ohnehin, und daher ist $Q_1 = Q_0$:

$$\Delta W_{EL} = \frac{Q_0^2}{2C_1} - \frac{Q_0^2}{2C_0} \tag{4}$$

Die Kapazität C hingegen hängt sehr wohl über die Beziehung $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ vom Plattenabstand d ab, und ist somit nicht konstant (A sei die Fläche der Kondensatorplatten):

$$\Delta W_{EL} = \frac{Q_0^2}{2}\frac{d_1}{\varepsilon_0 A} - \frac{Q_0^2}{2}\frac{d_0}{\varepsilon_0 A} \tag{5}$$

Dies lässt sich vereinfachen zu:

$$\boxed{\Delta W_{EL} = \frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 A}(d_1 - d_0)} \tag{6}$$

Für das elektrische Feld in einem Plattenkondensator gilt (näherungsweise) $E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$. Dies lässt sich umformen zu $Q = \varepsilon_0 A E$ bzw. $Q_0 = \varepsilon_0 A E_0$. Wir setzen dies in (6) ein:

$$\Delta W_{EL} = \frac{\varepsilon_0^2 A^2 E_0^2}{2\varepsilon_0 A}(d_1 - d_0) = \frac{\varepsilon_0 A}{2}E_0^2(d_1 - d_0) \tag{7}$$

Schließlich verwenden wir noch den Zusammenhang $E_0 = \frac{U_0}{d_0}$, und erhalten:

$$\boxed{\Delta W_{EL} = \frac{\varepsilon_0 A}{2}\left(\frac{U_0}{d_0}\right)^2(d_1 - d_0) > 0} \tag{8}$$

Erwartungsgemäß ist $\Delta W_{EL} > 0$. Die im elektrischen Feld gespeicherte Energie nimmt also zu, wenn wir die Platten auseinanderziehen.

1.4 Mechanische Arbeit

Betrachten wir nun die mechanische Arbeit, die wir leisten müssen, wenn wir den Plattenabstand von d_0 auf d_1 ändern. Erinnern wir uns zuerst, wie die mechanische Arbeit W_{mech} bei der Bewegung einer Punktladung q vom Punkt $\vec{r}_0$ zum Punkt $\vec{r}_1$ in einem elektrischen Feld $\vec{E}$ allgemein zu berechnen ist:

$$W_{mech} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{E} q \, d\vec{r} \tag{9}$$

Es ist wichtig zu beobachten, dass wir in dieser Formel nicht das Feld, welches von der bewegten Ladung q verursacht wird, berücksichtigen, sondern nur ein „externes“ Feld $\vec{E}$.

Nehmen wir nun (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) an, dass wir bei unserem Beispiel die rechte Platte b des Kondensators aus Abbildung 1 bewegen. Wir bewegen also die rechte Platte b mit Ladung Q_b im Feld E_a der linken Platte a. Wir können, in Analogie zu Formel (9), völlig analog anschreiben:

$$W_{mech} = -\int_{d_0}^{d_1} E_a Q_b \, dx \tag{10}$$

Es ist wichtig zu verstehen, dass wir - analog zu Formel (9) - das von der rechten (bewegten) Platte b verursachte Feld nicht mit berücksichtigen dürfen! Das Feld E_a der linken Platte a berechnet sich mit $E_a = \frac{Q_a}{2\varepsilon_0 A}$

$$W_{mech} = -\int_{d_0}^{d_1} \frac{Q_a}{2\varepsilon_0 A} Q_b \, dx \tag{11}$$

Es gilt (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $Q_a = +Q, Q_b = -Q$, und somit

$$W_{mech} = -\int_{d_0}^{d_1} \frac{Q}{2\varepsilon_0 A}(-Q)\, dx = \int_{d_0}^{d_1} \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} dx \tag{12}$$

Wie schon erwähnt: Im aktuellen Beispiel wird die Batterie nach dem Aufladen des Kondensators abgehängt. Die Ladungen können also „nirgendwo hin“, wenn wir den Plattenabstand verändern, es gilt außerdem Ladungserhaltung, und daher ist $Q = Q_0 = const.$

$$W_{mech} = \frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 A} \int_{d_0}^{d_1} dx \tag{13}$$

Wir lösen das Integral:

$$W_{mech} = \frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 A} x\Big|_{d_0}^{d_1} = \frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 A}(d_1 - d_0) \tag{14}$$

Für das elektrische Feld in einem Plattenkondensator gilt (näherungsweise) $E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$. Dies lässt sich umformen zu $Q = \varepsilon_0 A E$ bzw. $Q_0 = \varepsilon_0 A E_0$. Wir setzen dies in (14) ein:

$$W_{mech} = \frac{\varepsilon_0^2 A^2 E_0^2}{2\varepsilon_0 A}(d_1 - d_0) = \frac{\varepsilon_0 A}{2} E_0^2 (d_1 - d_0) \tag{15}$$

Schließlich verwenden wir noch den Zusammenhang $E_0 = \frac{U_0}{d_0}$, und erhalten:

$$\boxed{W_{mech} = \frac{\varepsilon_0 A}{2}\left(\frac{U_0}{d_0}\right)^2 (d_1 - d_0) > 0} \tag{16}$$

Erwartungsgemäß ist $W_{mech} > 0$, es wird also Arbeit am System verrichtet. Ein Vergleich der Ergebnisse (8) und (16) zeigt, dass unser Ansatz (2) erfüllt ist!

2 Bei einem Plattenkondensator mit dauernd verbundener Batterie werden die Platten verschoben.

2.1 Aufgabe

Wir lassen nunmehr beim Verschieben der Platten vom Abstand d_0 auf Abstand d_1 die Batterie mit Spannung U_0 ständig angeschlossen:

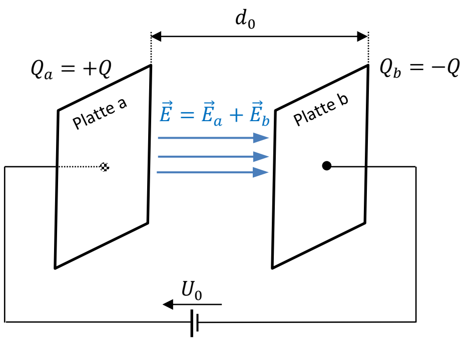

Abbildung 2: Die Spannungsquelle bleibt ständig mit dem Kondensator verbunden. Dann werden die Platten verschoben.

Wir wollen folgende Frage beantworten:

- Welche mechanische Arbeit W_{mech} wird geleistet, wenn die Platten vom Anstand d_0 auf den Abstand d_1 verschoben werden?
- Welche Energiedifferenz ΔW_{EL} im elektrischen Feld des Kondensators ergibt sich durch die Plattenverschiebung?
- Welche Energiedifferenz ΔW_{batt} ergibt sich durch die Plattenverschiebung in der Batterie?

2.2 Ansatz

Wir nehmen wieder (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) an, dass $d_1 > d_0$, also dass wir die Platten auseinander ziehen. Die beiden Platten sind, genauso wie im vorigen Beispiel, zu jedem Zeitpunkt gegengleich geladen, ziehen also einander an. Um sie auseinanderzuziehen, müssen wir also wieder *am System die mechanische Arbeit W_{mech} verrichten* und somit dem Gesamtsystem Energie *zuführen*. Gemäß unsere Konvention ist dann $W_{mech} > 0$.

Die mechanische Arbeit $W_{mech} > 0$, die wir im Fall $d_1 > d_0$ in das System hineinstecken, erhöht die im Gesamtsystem gespeicherte Energie W_{syst} um den Wert ΔW_{syst}.

$$\Delta W_{syst} = W_{mech} \tag{17}$$

Das „Gesamtsystem" besteht nunmehr aber sowohl aus dem Kondensator, als auch aus der angeschlossenen Batterie. Die im Gesamtsystem gespeicherte Energie setzt sich daher aus der Energie des elektrischen Feldes W_{EL} und der in der Batterie gespeicherten Energie W_{batt} zusammen: $W_{syst} = W_{EL} + W_{batt}$. Dementsprechend gilt $\Delta W_{syst} = \Delta W_{EL} + \Delta W_{batt}$. Eingesetzt in (17):

$$\Delta W_{EL} + \Delta W_{batt} = W_{mech} \tag{18}$$

2.3 Mechanische Arbeit

Nehmen wir wieder (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) an, dass wir die rechte Platte des Kondensators aus Abbildung 2 bewegen. Wir bewegen also die rechte Platte b mit Ladung Q_b im Feld E_a der linken Platte a. Daher können wir anschreiben:

$$W_{mech} = -\int_{d_0}^{d_1} E_a Q_b \, dx \tag{19}$$

Das Feld E_a der linken Platte a berechnet sich mit $E_a = \frac{Q_a}{2\varepsilon_0 A}$

$$W_{mech} = -\int_{d_0}^{d_1} \frac{Q_a}{2\varepsilon_0 A} Q_b \, dx \tag{20}$$

Q_1 und Q_2 sind zu jedem Zeitpunkt betragsmäßig gleich, haben gegengleiches Vorzeichen, und hängen vom Plattenabstand x ab: $Q_a = Q(x)\,, Q_b = -Q(x)$.

$$W_{mech} = -\int_{d_0}^{d_1} \frac{Q(x)}{2\varepsilon_0 A}(-Q(x))\, dx = \frac{1}{2\varepsilon_0 A}\int_{d_0}^{d_1} Q^2(x)\, dx \tag{21}$$

Beim Plattenkondensator gilt folgender Zusammenhang zwischen Spannung U, Feldstärke E, und Plattenabstand x:

$$U = Ex \tag{22}$$

Die Spannung wird durch die Spannungsquelle fix gehalten: $U = U_0$. Damit muss sich bei sich änderndem Plattenabstand x das elektrische Feld ändern: $E = E(x)$. Wir setzen dies in Formel (22) ein:

$$U_0 = E(x)\, x \tag{23}$$

Das elektrische Feld $E(x)$ des Plattenkondensators berechnet sich mit $E(x) = \frac{Q(x)}{\varepsilon_0 A}$. Eingesetzt in (23) ergibt das:

$$U_0 = \frac{Q(x)}{\varepsilon_0 A} x \tag{24}$$

Dies lässt sich umformen zu

$$Q(x) = \frac{U_0 \varepsilon_0 A}{x} \tag{25}$$

Dies setzen wir nun in Gleichung (21) ein:

$$W_{mech} = \frac{1}{2\varepsilon_0 A}\int_{d_0}^{d_1} \left(\frac{U_0 \varepsilon_0 A}{x}\right)^2 dx = \frac{1}{2} U_0^2 \varepsilon_0 A \int_{d_0}^{d_1} \frac{1}{x^2} dx \tag{26}$$

Wir lösen das Integral:

$$W_{mech} = -\frac{1}{2} U_0^2 \varepsilon_0 A \frac{1}{x}\Big|_{d_0}^{d_1} = -\frac{1}{2} U_0^2 \varepsilon_0 A \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_0}\right) \tag{27}$$

Wenn wir das Minus in die Klammer hineinbringen, ergibt dies:

$$\boxed{W_{mech} = \frac{1}{2} U_0^2 \varepsilon_0 A \left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d_1}\right) > 0} \tag{28}$$

Erwartungsgemäß wird Arbeit am System geleistet (Energie in das System hineingesteckt), wenn wir die Platten auseinanderziehen.

2.4 Änderung der Energie im elektrischen Feld

Offensichtlich gilt:

$$\Delta W_{EL} = W_{EL}^{(1)} - W_{EL}^{(0)} \tag{29}$$

Für die im elektrischen Feld eines Kondensators gespeicherte Energie gilt $W_{EL} = \frac{CU^2}{2}$. Wir setzen dies in Gleichung (29) ein:

$$\Delta W_{EL} = \frac{C_1 U_1^2}{2} - \frac{C_0 U_0^2}{2} \tag{30}$$

Die Spannung wird durch die Spannungsquelle immer Konstant auf U_0 gehalten, daher gilt $U_1 = U_0$, und somit

$$\Delta W_{EL} = \frac{C_1 U_0^2}{2} - \frac{C_0 U_0^2}{2} \tag{31}$$

Die Kapazität C eines Plattenkondensators berechnet sich (näherungsweise) mit $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ (wobei A die Plattenfläche darstellt). Eingesetzt in (31) ergibt das:

$$\Delta W_{EL} = \frac{\varepsilon_0 A}{d_1}\frac{U_0^2}{2} - \frac{\varepsilon_0 A}{d_0}\frac{U_0^2}{2} \tag{32}$$

Das lässt sich schließlich vereinfachen zu

$$\boxed{\Delta W_{EL} = \frac{1}{2} U_0^2 \varepsilon_0 A \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_0}\right) < 0} \tag{33}$$

Die im elektrischen Feld gespeicherte Energie nimmt also interessanterweise sogar ab, wenn wir mechanische Energie zuführen! Ein Vergleich mit Formel (28) zeigt, dass sie nochmal um genauso viel abnimmt, wie wir mechanische Energie zugeführt haben!

2.5 Änderung der Energie in der Batterie

Um festzustellen, wieviel Energie die Batterie gewinnt oder verliert, müssen wir uns überlegen, wieviel Ladungsträger in die Batterie hinein- oder herausfließen.

Dies können wir feststellen, indem wir berechnen, wie sich die Ladung Q an den Kondensatorplatten betragsmäßig verhält. Wenn die Ladung Q im Kondensator zunehmen sollte, dann hätten wir der Batterie Ladungsträger entnommen, d.h. es fließt ein elektrischer Strom von der Batterie zum Kondensator. Die Batterie hätte Energie verloren.

Umgekehrt, wenn wir feststellen, dass die Ladung im Kondensator abnimmt, dann haben wir der Batterie wieder Ladungsträger zugeführt, d.h. es fließt ein Strom vom Kondensator zu Batterie zurück, und die Batterie hat Energie gewonnen.

Die tatsächliche Änderung der im Kondensator gespeicherten Ladung lässt sich wie folgt berechnen:

$$\Delta Q_{kond} = Q_1 - Q_0 \tag{34}$$

Wir setzen den Zusammenhang $Q = CU$ in Formel (34) ein:

$$\Delta Q_{kond} = C_1 U_1 - C_0 U_0 \tag{35}$$

Die Spannung wird durch die Spannungsquelle immer Konstant auf U_0 gehalten, daher gilt $U_1 = U_0$, und somit

$$\Delta Q_{kond} = C_1 U_0 - C_0 U_0 \tag{36}$$

Die Kapazität C hängt über die Beziehung $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ vom Plattenabstand d ab (A ist dabei die Fläche der Kondensatorplatten). Wir setzen dies in (36) ein, und erhalten:

$$\Delta Q_{kond} = \frac{\varepsilon_0 A}{d_1} U_0 - \frac{\varepsilon_0 A}{d_0} U_0 \tag{37}$$

Dies lässt sich vereinfachen zu:

$$\Delta Q_{kond} = \varepsilon_0 A U_0 \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_0}\right) < 0 \tag{38}$$

Im Falle $d_1 > d_0$ nimmt die Ladung im Kondensator also ab. Wenn die Ladung im Kondensator abnimmt, muss die Ladung in der Batterie zunehmen ($\Delta Q_{batt} = -\Delta Q_{kond}$), und somit gilt:

$$\Delta Q_{batt} = \varepsilon_0 A U_0 \left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d_1}\right) > 0 \tag{39}$$

Dies damit zusammenhängende Energieänderung lässt sich berechnen durch

$$\Delta W_{batt} = \int_0^{\Delta Q_{batt}} U_0 \, dq \tag{40}$$

Da U_0 konstant ist, lässt sich das Integral sehr einfach lösen:

$$\Delta W_{batt} = U_0 q|_0^{\Delta Q_{batt}} = U_0 \Delta Q_{batt} \tag{41}$$

Wir setzen für ΔQ_{batt} die Beziehung aus Gleichung (39) ein, und bekommen:

$$\boxed{\Delta W_{batt} = U_0^2 \varepsilon_0 A \left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d_1}\right) > 0} \tag{42}$$

Setzen wir nun dieses Ergebnis, sowie die Ergebnisse (33) und (28) in unseren Ansatz $\Delta W_{EL} + \Delta W_{batt} = W_{mech}$ ein, erhalten wir:

$$\frac{1}{2} U_0^2 \varepsilon_0 A \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_0}\right) + U_0^2 \varepsilon_0 A \left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d_1}\right) = \frac{1}{2} U_0^2 \varepsilon_0 A \left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d_1}\right) \tag{43}$$

Wenn man berücksichtigt, dass $\frac{1}{2} U_0^2 \varepsilon_0 A \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_0}\right) = -\frac{1}{2} U_0^2 \varepsilon_0 A \left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d_1}\right)$, lässt sich das anschreiben als

$$-\frac{1}{2} U_0^2 \varepsilon_0 A \left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d_1}\right) + U_0^2 \varepsilon_0 A \left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d_1}\right) = \frac{1}{2} U_0^2 \varepsilon_0 A \left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d_1}\right) \tag{44}$$

was offensichtlich stimmt. Die Energieerhaltung ist also gewährleistet. Wir führen beim Auseinanderziehen der Platten dem System mechanische Energie zu. Im gleichen Ausmaß nimmt die Energie des elektrischen Feldes ab, was durch einen doppelt so großen Anstieg der Energie in der Batterie kompensiert wird.