Beispiel Brechungsindex
Ausarbeitung Helmut Hörner 8850092

Polarisierung eines angetriebenen Oszillators

In[1]:=
$$\alpha = \frac{\omega p^2}{(\omega 0^2 - \omega^2) + I\,\omega / \tau}; \text{ (* Amplitude *)}$$

In[2]:=
```
Et = E0 Cos[ω t]; (* Treibendes E-Feld *)
       Kosinus              Exponentialkc
```

In[3]:=
```
P[t] = FullSimplify[ϵ0 α Et, ComplexityFunction → LeafCount] (* Polarierung *)
       vereinfache vollständig  Komplexitätsfunktion   Anzahl der Blätter
```

Out[3]=
$$\frac{E0\, \epsilon 0\, \omega p^2 \operatorname{Cos}[t\, \omega]}{\frac{i\, \omega}{\tau} - \omega^2 + \omega 0^2}$$

In[4]:=
```
χ = ϵ - 1; (* definiere Suszeptibilität *)
```

Ermittle n^2 aus der Beziehung $P[t] = \epsilon 0^* \chi^* E[t]$

In[5]:=
```
nSquared = Apply[List,
                 wend··· Liste
   Flatten[FullSimplify[Solve[P[t] == ϵ0 χ Et , ϵ], ComplexityFunction → LeafCount]][[
   ebne ein  vereinfache voll··· löse              Komplexitätsfunktion   Anzahl der Blätter
    1]]][[2]] (* Berechne n² *)
```

Out[5]=
$$1 + \frac{\tau\, \omega p^2}{-\omega\,(-i + \tau\, \omega) + \tau\, \omega 0^2}$$

Daraus folgt bei Substitution $\omega p \to \sqrt{\frac{N\, q^2}{\epsilon 0\, m}}$ und $\tau \to \frac{1}{\gamma}$

die allgemeine Formel für n^2 gem. Demtröder 2 (8.32):

In[6]:=
$$\text{nSquared2} = \text{FullSimplify}\left[\text{nSquared} \;/.\; \left\{\omega p \to \sqrt{\frac{N\, q^2}{\epsilon 0\, m}},\ \tau \to \frac{1}{\gamma}\right\}, \text{ComplexityFunction} \to \text{LeafCount}\right]$$

```
vereinfache vollständig   Komplexitätsfunktion   Anzahl der Blä
```

Out[6]=
$$1 + \frac{N\, q^2}{m\, \epsilon 0\, (i\, \gamma\, \omega - \omega^2 + \omega 0^2)}$$

Für (n-1)<<1 gilt (n^2-1) -> 2(n-1).
Daraus folgt die Näherungsformel für dünnes Medium (zwei Varianten)
siehe Demtröder 2, (8.12a)

In[7]:=
```
(* Abhängig von ωp, τ *)
nDuenn = Apply[List, Flatten[FullSimplify[
        Solve[2 (n - 1) == nSquared - 1, n], ComplexityFunction → LeafCount]][[1]]][[2]]
(* Abhängig von N, q, m, γ *)
nDuenn2 = Apply[List, Flatten[FullSimplify[
        Solve[2 (n - 1) == nSquared2 - 1, n], ComplexityFunction → LeafCount]][[1]]][[2]]
```

Out[7]= $1 + \frac{\tau\, \omega p^2}{-2\,\omega\,(-i + \tau\,\omega) + 2\,\tau\,\omega 0^2}$

Out[8]= $1 + \frac{N\, q^2}{2\, m\, \epsilon 0\,(i\,\gamma\,\omega - \omega^2 + \omega 0^2)}$

Dispersionsrelationen: n = Re[nDuenn] - Im[nDuenn] (zwei Varianten)
siehe Demtröder 2, (8.21a.b)

In[9]:=
```
NurRealeParameter = {Element[{N, q, ω, m, ϵ0, γ, ω0, τ, ωp}, Reals],
    N > 0, q > 0, ω > 0, m > 0, ϵ0 > 0, γ > 0, ω0 > 0, τ > 0, ωp > 0};
```

In[10]:=
```
(* Abhängig von ωp, τ *)
nRe = FullSimplify[Re[ComplexExpand[nDuenn]], Assumptions → NurRealeParameter]
nIm = FullSimplify[Im[ComplexExpand[nDuenn]], Assumptions → NurRealeParameter]
(* Abhängig von N, q, m, γ *)
nRe2 = FullSimplify[Re[ComplexExpand[nDuenn2]], Assumptions → NurRealeParameter]
nIm2 = FullSimplify[Im[ComplexExpand[nDuenn2]], Assumptions → NurRealeParameter]
```

Out[10]= $1+\frac{\tau^2\left(-\omega^2+\omega0^2\right)\omega p^2}{2\left(\tau^2\omega^4+\tau^2\omega0^4+\omega^2\left(1-2\tau^2\omega0^2\right)\right)}$

Out[11]= $-\frac{2\tau\omega\,\omega p^2}{4\omega^2+\left(2\tau\omega^2-2\tau\omega0^2\right)^2}$

Out[12]= $1+\frac{N q^2\left(-\omega^2+\omega0^2\right)}{2 m \epsilon0\left(\gamma^2\omega^2+\left(\omega^2-\omega0^2\right)^2\right)}$

Out[13]= $-\frac{N q^2\gamma\omega}{2 m \epsilon0\left(\gamma^2\omega^2+\left(\omega^2-\omega0^2\right)^2\right)}$

Bei Metallen: Elektronen frei beweglich; daher k=0 und daher $\omega 0=k/m=0$. Daraus folgt die allgemein gültige n^2-Formel für Metalle (drei Varianten):

In[14]:=
```
nMetallSquared = Limit[nSquared, ω0 → 0] (* Abhängig von ωp, τ *)
nMetallSquared2 = Limit[nSquared2, ω0 → 0] (* Abhängig von N, q, m, γ *)
nMetallSquared3 = FullSimplify[Limit[nSquared2, ω0 → 0] /. {N q^2/m → σ γ} /. {γ → 1/τ},
  ComplexityFunction → LeafCount] (* Abhängig von σ, τ *)
```

Out[14]= $1-\frac{\tau\,\omega p^2}{\omega\left(-i+\tau\omega\right)}$

Out[15]= $1+\frac{N q^2}{m\epsilon0\left(i\gamma\omega-\omega^2\right)}$

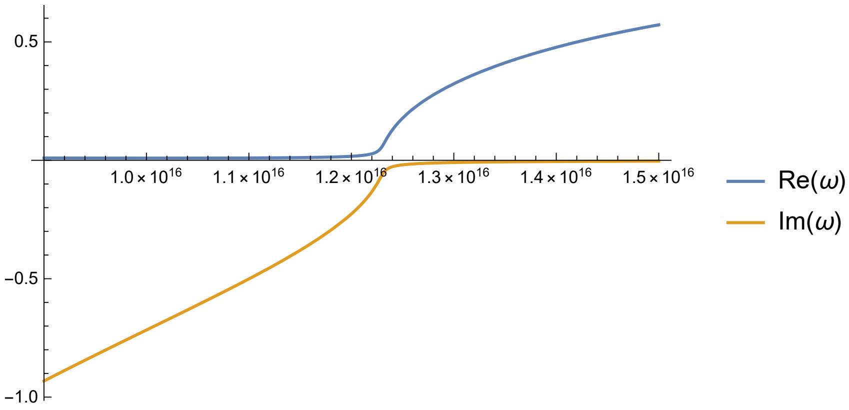
Out[16]= $1-\frac{\sigma}{\epsilon0\,\omega\left(-i+\tau\omega\right)}$

Plot Re[n] und Im[n] für Silber

In[17]:=
```
SilberDaten = {τ → 1.13997 × 10^-14, ωp → 1.23026 × 10^16, ω0 → 0};
```

In[18]:=
```
Plot[{Re[√nMetallSquared /. SilberDaten], Im[√nMetallSquared /. SilberDaten]},
 {ω, 0.9 × 10^16, 1.5 × 10^16}, PlotLegends → {"Re(ω)", "Im(ω)"}]
```
stelle··· Realteil Imaginärteil
Legenden der Grap··· Realteil Imaginärteil

Out[18]=



In[19]:=
```
Manipulate[Plot[{nRe /. {τ → Tau, ωp → Plasmafreq, ω0 → Resonanzfreq},
   nIm /. {τ → Tau, ωp → Plasmafreq, ω0 → Resonanzfreq}}, {ω, 0.8 × 10^16, 1.5 × 10^16}],
 {Tau, 0, 5 × 10^-14}, {Plasmafreq, 0, 10^17}, {Resonanzfreq, 0, 10^17}]
```
manipuliere stelle Funktion graphisch dar

Out[19]=