

Physik III Merckzettel

15.08.2021

Streuung

Rutherford-Streuung (Str. am Coloumbpot.)	$\cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{2E_{kin}}{E_{pot}(b)} = \frac{4\pi\epsilon_0}{qQ} \mu v_0^2 b$	$q_\alpha = 2e$ $Q_{Kern} = Ze$	$Z \dots$ Ordnungszahl $b(\vartheta) \dots$ Stoßparameter	Reduz. Masse $\mu = \frac{m_\alpha m_{Kern}}{m_\alpha + m_{Kern}}$
Rutherford Streuung:	$\frac{dN}{N_0} = \frac{n_p d}{4} \left(\frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 E_{kin}}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} d\Omega$	Raumwinkel: $d\Omega = \frac{dA}{R^2} = \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi$	Diff. Streuquerschnitt: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\vartheta} \frac{db}{d\vartheta}$	Thomson Streuung $N(\vartheta) = N_0 e^{-\frac{\vartheta^2}{m_{streu} v^2}}$
Anz. Streue-reignisse	$m_{streu} = \frac{d}{\Lambda}$	Mittl. freie Weglänge $\Lambda = \frac{1}{n_p \sigma}$	Wirkungs-querschn. $\sigma = \pi b_{max}^2$	Teilchen-dichte/m³: $n_v = \frac{N}{V} = \frac{mNA}{MV} = \frac{\rho NA}{M}$
				Teilchendichte pro m²: $n_A = dn_v$

Photonen und Wärmestrahlung

Planksches Wirkungsquantum	$h = 6,626 \cdot 10^{-34} Js$	Reduziertes Wirkungsquantum:	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	Energie: $E_{photon} = hf = \hbar\omega$	Impuls: $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{\hbar\omega}{c}$	Intensität: $I = \frac{P}{A}$
Maximale Kraft auf Atom	$F_{max} = pR_{max}$	Streu-rate: $R_{max} = \frac{1}{2\tau}$	SRT $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$; $\beta = \frac{v}{c}$	Doppler versch $f_R = f_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$	Impuls: $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$	$E^2 - p^2 c^2 = E_0^2$ $E = \gamma m_0 c^2$
Rayleigh-Jeans nur für kleine f:	Moden pro Raumrichtung: $d = \frac{1}{2} n_x \Rightarrow k_x = n_x \frac{\pi}{d} \Rightarrow \frac{N(f \leq f_0)}{V} = n = \frac{8\pi f_0^3}{c^3}$			Moden-dichte: $\frac{dn}{df} = \frac{8\pi f^2}{c^3}$	Energie-dichte: $w(f) df = \frac{8\pi f^2}{c^3} kT df$	
Planksches Strahlungsg.	$w(f) df = \frac{8\pi h f^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} df$	räuml. Energiedichte	$w(T) = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} T^4 \left[\frac{J}{m^3}\right]$	Strahlungs-dichte: $S \stackrel{def}{=} \frac{d^2 P}{\cos(\vartheta) dA d\Omega} = \frac{I}{4\pi} = \frac{w(T)c}{4\pi} \left[\frac{W}{m^2 sr}\right] \Rightarrow$		
In Halbraum emittierte Strahlungsleistung pro Fl.	$\frac{dP}{dA} = \sigma T^4 \left[\frac{W}{m^2}\right]$; $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$		Wiensches Verschiebungsgesetz	$\lambda_{max}(T) = \frac{C_{wien}}{T}$; $C_{wien} = 2,898 mm \cdot K$		
Doppler-verbreiterung:	$\Delta f_D = \frac{2f_0}{c} \sqrt{\frac{2RT \ln(2)}{M}} = \sqrt{8 \ln(2)} \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$		Stoßver-breiterung:	$\Delta f_c = \frac{1}{2\pi\tau_c}$; $\tau_c = \frac{1}{\sigma_s p} \sqrt{\frac{\pi m k_B T}{8}}$; $\sigma_s = 4\pi r^2$	Natürliche Linienbreite:	$\Delta f_c = \frac{1}{2\pi\tau}$

Quanten

Bloch-Vektor:	$ \psi\rangle = \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) 0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) 1\rangle$	Wahrscheinlichkeitsdichte:	$ \psi\rangle^2 = \langle\psi^* \psi\rangle$; $\int_{-\infty}^{\infty} \psi ^2 dx = 1$	Erwartungswert	$\langle x \rangle = \int_a^b x \psi ^2 dx$
Wahrscheinlichkeit für $P_{ 0\rangle}$ und $P_{ 1\rangle}$	$P_{ 0\rangle} = \langle 0 \psi\rangle ^2 = \left \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right ^2 = \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$ $P_{ 1\rangle} = \langle 1 \psi\rangle ^2 = \left e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right ^2 = \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$				
Basistransform.	$ \pm 45^\circ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(H\rangle \pm V\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle \pm 1\rangle)$; $ \sigma^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(H\rangle \pm i V\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}((1 \pm i) +45^\circ\rangle + (1 \mp i) -45^\circ\rangle)$				
Allgemein:	$Geg.: \psi\rangle; ONB B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\} \Rightarrow [\psi\rangle]_B = \sum_{i=1}^n a^i b_i\rangle$ mit $a^i = \langle \vec{b}_i \psi \rangle$ (weil: $a^i b_i\rangle = \vec{b}_i\rangle \langle \vec{b}_i \psi \rangle$)				
Rotations-matrizen	$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$; $R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$; $R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$				
Verschränkung:	$ \psi\rangle = \alpha_1 11\rangle + \alpha_2 10\rangle + \alpha_3 01\rangle + \alpha_4 00\rangle = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$ Wenn $\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3 \neq 0 \Rightarrow$ vollst. bestimmt; verschränkt . Wenn $\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3 = 0 \Rightarrow$ nicht verschränkt				

Materiewellen

De-Broglie, klassisch	$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}} = \frac{h}{\sqrt{2m^2 v^2}} = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}}$	$p = \hbar k$ $k = \frac{2\pi}{\lambda}$	relativistisch	$\hbar\omega = E = mc^2 = \gamma m_0 c^2$ $\hbar k = \frac{h}{\lambda} = p = mv = \gamma m_0 v$	$\lambda = \frac{h}{p}$; $v = c \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E_0 + E_{kin}}\right)^2}$ $p = \frac{1}{c} \sqrt{2E_0 E_{kin} + E_{kin}^2}$
-----------------------	--	---	----------------	--	--

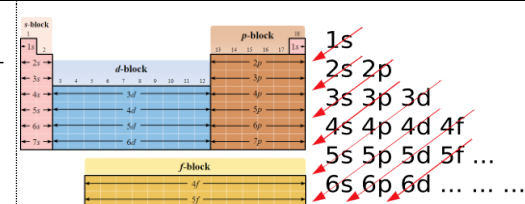
Schrödingergleichung

Allg. Wellengleichung (1D)	$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$	Allg. Lsg.	$\psi = Ae^{i(kx - \omega t)}$ 2x nach x ableit. $\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 \psi$ $k^2 = \frac{p^2}{\hbar^2} = \frac{2m}{\hbar^2} E_{kin} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} E_{kin} \psi$ $E_{kin} = E - E_{pot} \Rightarrow$
Stationäre 1D-Schröd.gleich.:	$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_{pot} \psi = E \psi$; $\psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$	Stationäre 3D Schrödingergleichung	$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + E_{pot} \psi = E \cdot \psi$
Zeitabh. 1D-Schröd.gleich.:	$\psi = Ae^{i(kx - \omega t)}$ 1x nach t ableit. $\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega \psi$ $\omega = \frac{E}{\hbar} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \psi \Rightarrow E = i \frac{\hbar}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t}$ in stat. Gleich. einsetzen $\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + E_{pot} \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$		
Schrödinger: „Gilt auch bei $E_{pot} = E_{pot}(x, t)$ “ $\Rightarrow$	$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + E_{pot}(x, t) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}$	Schrödingergleichung 3D zeitabh.:	$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + E_{pot}(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$
Potentialstufe von $E_{pot}=0$ auf $E_{pot}=E_0$ bei $x=a$	$\Psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$; $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$ $\Psi_2(x) = Ce^{-\alpha x}$; $\alpha = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E_0 - E)}$	Unendlich hohes Kastenpotential 0 bis a	$\Psi_n(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ $A = -B \Rightarrow \Psi_n(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) \Rightarrow \Psi_n(x) = 2A \sinh(0 + ikx) = i \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$; $E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{8a^2 m}$
Potentialbarriere $E_{pot}=0/E_0/0$ zw. $x=0$ und a	$\Psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$; $\Psi_2(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x}$; $\Psi_3(x) = Ee^{ikx}$ $T = \left(\frac{1}{4} \frac{E_0^2}{E_0(E_0 - E)} \sinh^2(\alpha a) + 1\right)^{-1} \approx \frac{16(E_0 - E)}{E_0^2} e^{-2\alpha a}$ für $\alpha a \gg 1$; $R = \frac{\left(\frac{\alpha^2}{k^2} + 2 + \frac{k^2}{\alpha^2}\right) \sinh^2(\alpha a)}{4 \cosh^2(\alpha a) + \sinh^2(\alpha a)} \left(\frac{\alpha k}{\alpha^2 - k^2}\right)^2$; $R + T = 1$		

Operatoren, Erwartungswerte und Eigenfunktionen

	Sei A irgendeine mit Quantenunschärfe behaftete quantenphysikalische Messgröße („Observable“), z.B. Ort oder Impuls.		
Erwartungswert	$\langle A \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i$ (Der Erwartungswert $\langle A \rangle$ ist der zu erwartende Mittelwert bei wiederholter Messung.)		
Operatoren $\hat{A}$	$\langle A \rangle = \hat{A} \Psi = \int \Psi^* \hat{A} \Psi d\tau = \int \Psi ^2 \hat{A} d\tau$. ($\hat{A} \dots$ Operator von A; $\Psi \dots$ Wellenfunkt.; $\Psi^* \dots$ konjug. komplexe Wellenfunktion)		
	Observable	Operator 1-dimensional	Operator 3-dimensional
	Ortsvektor $\vec{r}$ bzw. Koordinate x	$\hat{x} = x$	$\hat{\vec{r}} = \vec{r}$
	Potentielle Energie E_{pot}	$\hat{E}_{pot} = E_{pot}(x) = \hat{V}(x)$	$\hat{E}_{pot} = E_{pot}(\vec{r}) = \hat{V}(\vec{r})$
	kinetische Energie E_{kin}	$\hat{E}_{kin} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$	$\hat{E}_{kin} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$
	Gesamtenergie $E = E_{kin} + E_{pot}$	$\hat{H} = \hat{V} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ (Hamilton-Operator 1D)	$\hat{H} = \hat{V} - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta$ (Hamilton-Operator 3D)
	Impuls p bzw. $\vec{p}$	$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$	$\hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla}$
	Drehimpuls $\vec{L}$	z-Komponente von $\vec{L}$: $\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$	$\hat{\vec{L}} = -i\hbar (\vec{r} \times \vec{\nabla})$
Mittlere quadr. Schwankung	$\langle A^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (A_i - \langle A \rangle)^2 = \hat{A}^2 \Psi = \int \Psi^* \hat{A}^2 \Psi d\tau$		Unschärfe: $\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$
Wahrscheinlichkeitsdichte:	$dP(x, t) = \rho(x, t) = \Psi(x, t) ^2 = \Psi(x, t) \Psi^*(x, t)$		Wahrscheinlichkeit: $P(x, t) = \langle \Psi^* \Psi \rangle; \int_a^b \Psi ^2 dx; \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi ^2 dx = 1$
Eigenfunktion, Eigenwert	Wenn gilt: $\hat{A}\Psi = A\Psi \Leftrightarrow \int \Psi^* \hat{A} \Psi d\tau = A \int \Psi^* \Psi d\tau$, dann ist $\hat{A}$ eine Eigenfunktion und A ein Eigenwert. Es gilt: $\langle A \rangle = A$; $\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = 0$; d.h. die mittlere quadr. Schwankung von $A=0$, man misst immer denselben Wert von A. Haben die Größen A und B mit den Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ dieselbe Eigenfunktion Ψ , dann lassen sich die Größen A und B am Teilchen mit der Wellenfunktion Ψ gleichzeitig scharf messen. Die Operatoren sind vertauschbar. Es gilt: $\hat{A}\hat{B}\Psi = \hat{B}\hat{A}\Psi$.		

Atome, Moleküle, Quantenzahlen

Bohrscher Radius:	$F_z = \mu a_z = -\mu r \omega^2 = -\mu r \frac{v^2}{r^2} = -\frac{\mu v^2}{r}; F_c = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2}; F_z = F_c \Rightarrow r = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \mu v^2}; \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\mu v} = \frac{2\pi r}{n} \Rightarrow v = \frac{nh}{2\pi r \mu} \Rightarrow r = \frac{n^2 \hbar^2 \epsilon_0}{\pi \mu Z e^2}$		
Bindungsenergie:	$F_z = F_c \Rightarrow -\frac{\mu v^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} \cdot \frac{r}{2} \Rightarrow \frac{\mu v^2}{2} = \frac{1}{2} e \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow E_{kin} = \frac{1}{2} e(-\varphi) = -\frac{1}{2} E_{pot}; E_n = E_{kin} + E_{pot} = E_{kin} - 2E_{kin} = -E_{kin} \Rightarrow E_n = -\frac{\mu v^2}{2} = -\frac{n^2 \hbar^2}{4\pi^2 r^2 \mu} \left r = \frac{n^2 \hbar^2 \epsilon_0}{\pi \mu Z e^2} \right \Rightarrow E_n = -\frac{\mu e^4 Z^2}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} = -R_y \hbar c \frac{Z^2}{n^2} = -R_y^* \frac{Z^2}{n^2}$ Z... Kernzahl μ... reduz. Masse Rydbergkonstante $R_y^* = R_y \hbar c = \frac{\mu e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$		
Hauptquantenzahl (Schale)	$n = 1, 2, 3, \dots$ $n = K, L, M, N, \dots$	Nebenquantenzahl (Drehimpulsquantenz.)	$l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ $l = s, p, d, f, g, \dots$
Magnetische QZ des Drehimpulses	$m_l = \frac{L_z}{\hbar} = \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$	Orientierung Elektronen-Bahndrehimpuls: Größe z-Komponente in Einheiten $\hbar$. Zusatzl. die bei Anlegen eines Magnetfeldes in z-Richtung auftritt (Zeeman-Effekt)	
Magnetische Spin-Quantenzahl	$m_s = \pm \frac{s_z}{\hbar} = \pm \frac{1}{2}$ mit $s_z = \frac{1}{2} \hbar$	Orientierung des Elektronen-Spins zur z-Achse.	Elektronen Gesamtdrehimpulsquantenzahl des Atoms $J = \sum l + \sum s$ Feinstruktur (elektronenspin)
Molekülschwingung	$E_{vib} = \left(n' + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega; f_{vib} = \left(n' + \frac{1}{2}\right) c \omega_e; \omega_e = \frac{1}{\lambda} \dots$ Wellenzahl $\left[\frac{1}{m}\right]$; n ... Schwingungsquantenzahl. $\Delta n = \pm 1$		
Molekülrotation:	$E_{rot} = \frac{l \omega^2}{2} = \frac{l^2}{2I} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I}; \omega = \sqrt{l(l+1)} \frac{\hbar}{I}$	Konfigurationsnotation	nL mit $L = \sum l$ $2s+1 L_J$ ($2s+1 \dots$ Multiplizität = Zahl der Feinstrukturkomponenten für $L \neq 0$)
Gesamtdrehimpulsquantenzahl	$F = \{ I-J , I-J +1, \dots, I+J -1, I+J \}$ $\Rightarrow$ Hyperfeinstruktur ($I \dots$ Kernspin)	Periodensystem und Aufbauprinzip ¹⁾ 	
Gesamtdrehimpuls	$\dots$ der Elektronen $\langle \vec{J} \rangle = \hbar$ $\dots$ des Atom ges.: $\langle \vec{F} \rangle = \hbar \sqrt{F(F+1)}$		
Entartung (Zeemanzustände)	$m_F = \{-F, -F+1, \dots, F-1, F\}$		

Diverses

cos(<u>z</u>)	$\cos(\underline{z}) = \cos(x + iy) = \operatorname{Re}(e^{iz}) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y) = \cosh(i\underline{z})$		$\overline{\cos(\underline{z})} = \cos(\bar{z})$						
sin(<u>z</u>)	$\sin(\underline{z}) = \sin(x + iy) = \operatorname{Im}(e^{iz}) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y) = -i \sinh(i\underline{z})$		$\overline{\sin(\underline{z})} = \sin(\bar{z})$						
cosh(<u>z</u>)	$\cosh(\underline{z}) = \cosh(x + iy) = \frac{e^{\underline{z}} + e^{-\underline{z}}}{2} = \cosh(x) \cos(y) + i \sinh(x) \sin(y)$								
sinh(<u>z</u>)	$\sinh(\underline{z}) = \sinh(x + iy) = \frac{e^{\underline{z}} - e^{-\underline{z}}}{2} = \sinh(x) \cos(y) + i \cosh(x) \sin(y)$								
Planck-Masse:	$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$	Planck-Länge:	$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$	Planck-Zeit:	$t_p = \frac{l_p}{c}$	Planck-Ladung:	$q_p = \sqrt{\hbar c 4\pi\epsilon_0}$	Planck-Temperatur	$T_p = \frac{m_p c^2}{k}$

¹⁾ Grafiken von https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Klechkovski_rule.svg und https://de.wikipedia.org/wiki/Elektronenkonfiguration#/media/File:Periodic_Table_2_svg unter Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported license.

Physik II

15.08.2021

Maxwellgleichungen

(A) Statische Felder, in Vakuum und isotroper Materie (Vakuum: $\mu_r = 1, \epsilon_r = 1$)				
Bez.	Differentiell	Bemerkungen	Integral	Bemerkungen
1) Gauß E	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_r \epsilon_0}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{frei}$	Die Raumladungen sind Quellen oder Senken des E-Feldes Dielektr. Verschiebung $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$	$\oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{q_{ein}}{\epsilon_r \epsilon_0}$ $\oint_A \vec{D} d\vec{A} = q_{ein}$	Gesamtfluss durch geschlossene Fläche ist proportional zur eingeschlossenen Ladung
2) Gauß M	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Magn. Feldlinien geschlossen, es gibt keine magn. Monopole	$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$	Der magnetische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche ist Null.
3) Stokes	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$	Statisches E-Feld ist wirbelfrei	$\oint_C \vec{E} d\vec{s} = 0$	Statisches E-Feld ist konservatives Kraftfeld
4) Amp. G.	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{j}$ $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$	$\text{rot}(\vec{B}) = \text{lokale Stromdichte}$ Magn. Feldstärke $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_r \mu_0}$	$\oint_C \vec{B} d\vec{s} = \mu_r \mu_0 I$ $\oint_C \vec{H} d\vec{s} = I$	Geschlossenes Kurvenintegral von B ist proportional zum eingeschlossenen Strom
(B) Dynamische Felder, in Vakuum und isotroper Materie (Vakuum: $\mu_r = 1, \epsilon_r = 1$)				
Bez.	Differentiell	Bemerkungen	Integral	Bemerkungen
1) Gauß	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_r \epsilon_0}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{frei}$	wie (A), gilt immer	$\oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{q_{ein}}{\epsilon_r \epsilon_0}$ $\oint_A \vec{D} d\vec{A} = q_{ein}$	wie (A), gilt immer
2)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	wie (A), gilt immer	$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$	wie (A), gilt immer
3) Faraday	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	E-Feld hat bei veränderlichem B-Feld Wirbel	$\oint_C \vec{E} d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{A}$	„Induktionsgesetz“
4) Amp. G.	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{j} + \mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\text{rot}(\vec{B}) = \text{lokale Stromdichte}$	$\oint_C \vec{B} d\vec{s} = \mu_r \mu_0 I + \mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \mu_r \mu_0 I + \mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} d\vec{A}$ $\oint_C \vec{H} d\vec{s} = I + \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} = I + \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{D} d\vec{A}$	
Elektr. Pot.	$\varphi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}$	Eichfreiheit: $\varphi(\vec{r}) \rightarrow \varphi'(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) - \frac{\partial \chi}{\partial t}$	Mag. Pot.: $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$	Eichfreiheit: $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$
Felder ↔ Potential:	$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$	Polarisation: $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	Magnetisierung: $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$	

Statisches elektrisches Feld (wirbelfreies Quellenfeld)

Coulomb Gesetz:	$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r = q\vec{E}; [q] = C = As$	Feldstärke:	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_0}; [E] = \frac{V}{m} = \frac{N}{C} = \frac{kg \cdot m}{As^3}$	Punktladung:	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$
Kont. Raumladg	$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{ \vec{r}-\vec{R} ^2} \vec{e}_R dQ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{r}-\vec{R}}{ \vec{r}-\vec{R} ^3} \rho(\vec{R}) dV; \rho(\vec{R}) = \frac{dQ}{dV}$	Vollkugel:	$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$	Hohlkugel:	$\vec{E}_{außen}(r) = \frac{R^2 \sigma}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$
Gauß = Maxwell 1	Fluss $\phi = \frac{q_{ein}}{\epsilon_0} = \oint_A \vec{E} d\vec{A} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \mid q_{ein} = \oint_V \rho dV \Rightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$				
Poisson	$\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \varphi(\vec{r})) = \boxed{-\Delta \varphi(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}}$				
Stokes = Maxwell 3	$\oint_C \vec{E} d\vec{s} = 0 \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_A \vec{\nabla} \times \vec{E} d\vec{A} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0} \Rightarrow \text{statisches E-Feld ist wirbelfrei}$				
Potential, Spannung	$\varphi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = \frac{W_{pot}}{q}; U_{ab} = \varphi(a) - \varphi(b) = -\int_b^a \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}; [V], \left[\frac{kg \cdot m^2}{As^3}\right]$	Pkt. lsg.	$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$	$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r})$ weil $\oint_C \vec{E} d\vec{s} = 0$	
Vollkugel:	$\varphi_{innen}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right); \varphi_{außen}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$	Hohlkugel:	$\varphi_{innen} = const; \varphi_{außen}(r) = \frac{R^2 \sigma}{\epsilon_0} \frac{1}{r}; \varphi_{Oberfl} = const. \Rightarrow \sigma = \epsilon_0 \frac{\varphi}{r}$		
Arbeit, Energie:	$W = -\int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(\vec{s}) d\vec{s} = -q \int_{s_1}^{s_2} \vec{E}(\vec{s}) d\vec{s} = -q \cdot (\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)) = -qU_{21}; W_{pot} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dV$			$\Delta W_{pot} = -qU_{21}$ $\Delta W_{kin} = -\Delta W_{pot} = qU$	

Elektrischer Dipol

Dipolmoment:	$\vec{p} = q\vec{d} [Cm]$	Energie:	$W_{pot} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$	Potential:	$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$	Drehmoment im homogenen Feld	$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$
Dipol im inhomogenen Feld:	$\vec{F} = \vec{p} \cdot \vec{\nabla}(\vec{E}) \Rightarrow F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z}$						

Strom

Strom:	$I = \frac{dQ}{dt} = \int \vec{j} d\vec{A} = \int qn\vec{v} d\vec{A} = \lambda \vec{v} (\lambda \dots \text{Linienstromdichte})$	Kreisstrom	$I = Qf$	Stromdichte:	$\vec{j} = qn\vec{v} = \rho\vec{v} = \sigma\vec{E} \left[\frac{A}{m^2}\right]$
Leitfähigkeit:	$\sigma_{el} = \frac{q^2 n \tau_s}{m}$	Spez. Widerstand:	$\rho_{el} = \frac{1}{\sigma_{el}}$	Widerstand:	$R = \rho_{el} \frac{L}{A} [\Omega]$

Kondensatoren

Kapazität	$C = \frac{Q}{U} [F]$	Parallel-Schaltung	$C_{ges} = C_1 + C_2$	Serie:	$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}; Q_{ges} = Q_1 = Q_2$	Energiedichte:	$w_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$	Energie:	$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C U^2$		
Plattenkondens.	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$		$U = Ed = \frac{Q}{\epsilon_0 A} d$		$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$	Kugulkond.	$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_i}{r_a - r_i}$	Zylinderkondens.	$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln b/a}$	Kugel:	$C = 4\pi\epsilon_0 r$
Dielektrikum:	$E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$	Dielektrische Verschiebung:	$D = \epsilon_r \epsilon_0 E_{diel} = stetig$	Brechung:	$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}$	Strom, Spannung	$I_C = C \frac{dU}{dt}; U_C = \frac{1}{C} \int I dt$				

Statisches Magnetfeld (quellenfreies Wirbelfeld)

Kraft zweier Magnetpole	$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{p_1 p_2}{r^2} \vec{e}_r$	„Magnetische Feldstärke“	$\vec{H}(\vec{r}) = \lim_{p_2 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{p_2} \left[\frac{A}{m} \right]$	Mag. Flussdichte (magn. Induktion):	$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} [T]$	Zusammenh.	$\epsilon_0, \mu_0, c: \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$
Mg. Fluss Maxw. 2	$\Phi [Wb] = \oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$	Gauß	$\oint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0; \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow$ Feldl. geschl.	Magnetische Permeabilität:	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$	Feldstärke in Materie	$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_r \mu_0}$
Amp. Gesetz: Statisches Vakuum (Maxwell 4)	$\mu_0 I = \oint_C \vec{B} ds$	Stokes	$\oint_A (\vec{\nabla} \times \vec{B}) d\vec{A} = \mu_0 \int_A \vec{j} d\vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow$ Rot. B = lokale Stromdichte				$\oint \vec{H} d\vec{s} = NI$ (gilt auch in Materie)
Vektor Potential	$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$	Coulomb-Eichung:	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_m(\vec{r}) = 0$	Poisson:	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \mid \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}_m) = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_m) - \Delta \vec{A}_m = \mu_0 \vec{j} \mid \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_m = 0 \Rightarrow \Delta \vec{A}_m = -\mu_0 \vec{j}$		
Vektor Potential	$\vec{A}_m(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}_2)}{r_{12}} dV_2$		$\vec{B}(\vec{r}_1) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_m(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}_2) \times \vec{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2; \vec{j} dV = \vec{j} \vec{A} d\vec{s} = I d\vec{s} \Rightarrow$			Biot-Savart	$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{Leiter} \frac{\vec{e}_{12} \times d\vec{s}_2}{r_{12}^2}$
Lorentz kraft:	$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ $\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$	Induktion	$\phi = LI = \oint_A \vec{B} d\vec{A}$			Magn. Feld einer bewegten Punktladung:	$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}$

Elektromagnetische Induktion (dynamisches E- und B-Feld)

Faradaysches Gesetz:	$U_{ind} = -N \frac{d\phi_{mag}}{dt}$	Drehende Leiterschleife	$U_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} (BA \cos(\varphi)) = -\frac{d}{dt} BA \cos(\omega t) = BA \omega \sin(\omega t)$		
Maxwell 3	$U_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} \mid U_{Schleife} = \oint \vec{E} d\vec{s} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \int \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$ E-Feld hat in Anw. eines veränderlichen B-Feldes Wirbel				
Selbstindukt.	$U_{ind} = -N \frac{d\phi}{dt} \mid \phi = LI \Rightarrow U_{ind} = -L \frac{dI}{dt}$				
Verschiebungsstrom	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \Rightarrow Q = \epsilon_0 AE \Rightarrow \text{Einsetzen in } I_v = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow I = \frac{d}{dt} (\epsilon_0 AE) = \epsilon_0 A \frac{\partial E}{\partial t} \Rightarrow j_v = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$				
Maxwell 4	$\mu_0 I + \mu_0 I_v = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 A \frac{\partial E}{\partial t} = \oint_C \vec{B} ds \Rightarrow$ Gesamtstrom = Leitungsstrom und Verschiebungsstrom wegen $(\partial E / \partial t) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$ B-Felder auch aufgrund von $(\partial E / \partial t)$				

Leiterschleifen und Induktivitäten

Feld unendl. Spule:	$\mu_0 NI = \oint_C \vec{B} ds \approx Bl \Rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{l}$	Induktivität (unendl. Spule)	$N\Phi = LI \Rightarrow NBA = LI \Rightarrow L = \frac{NBA}{I} \Rightarrow L = \mu_r \mu_0 N^2 \frac{A}{l} [H] = [\Omega s]$		
Feld einer Leiterschleife	$B_x = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}$	Helmholtz Spulenpaar	$B = \frac{\mu_0 8IN}{\sqrt{125}R}$	Feld in Spule (exakt):	$B(x) = \frac{\mu_0 I N}{2l} \left(\frac{x + \frac{l}{2}}{\sqrt{(x + \frac{l}{2})^2 + R^2}} - \frac{x - \frac{l}{2}}{\sqrt{(x - \frac{l}{2})^2 + R^2}} \right)$
Parallel:	$\frac{1}{L_{ges}} = \sum \frac{1}{L_n} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$	Serie: $L_{ges} = \sum L_n$	Energiedichte	$w_{mag} = \frac{B^2}{2\mu_0}$	Energie: $W = \int_V w dV$
Strom, Spannung	$I_L = \frac{1}{L} \int U dt; U_L = L \frac{dI}{dt}$	Magnetisches Dipolmoment	$\vec{p}_m = I \vec{A} [Am^2]; \vec{A} = A \vec{e}_n$	$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi r^3}$	$W_{pot} = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}_{au\ddot{a}}\text{u\ss}en$

Hertzscher Dipol

Fernfeld:	$ E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{p_0 \omega^2}{r} \sin(\vartheta) \sin(\omega t - kr); B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{p_0 \omega^2}{r} \sin(\omega t - kr)$	Energiedichte	$w_{EM} = w_{el} + w_{mag} = \epsilon_0 \vec{E}^2$		
Abgestrahlte Leistung	$P = \oint \vec{S} \cdot d\vec{A} = \frac{p_0^2 \omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^2} \sin^2(\omega t - kr) \Rightarrow \bar{P} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^2}$	Induz. Spannung in Empfangsantenne	$U = El$	Energiestromdichte; Intensität	$S = I = wc$
Poynting vektor	$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$	E-Feld an Oberfl. eines gleichstromdurchfl. Drahtes	$\vec{E} = \frac{rI}{l} = \frac{\rho I}{r^2 \pi}$	B-Feld an Oberfl. eines gleichstromdurchfl. Drahtes	$\oint B ds = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_t$

Hohlraumresonatoren

Randbed Tangent. komp = 0	$E_x = 0 \text{ f\"ur } x = 0, c \text{ und } x = 0, b$ $E_y = 0 \text{ f\"ur } x = 0, a \text{ und } z = 0, c$ $E_z = 0 \text{ f\"ur } x = 0, a \text{ und } z = 0, b$	Randbed stehende Wellen:	$k_x = \frac{n\pi}{a}$ $k_y = \frac{m\pi}{b}$ $k_z = \frac{q\pi}{c}$ $ \vec{k} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ $ \vec{k} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{q^2}{c^2}}$ $\omega = \vec{k} c_0$	$\vec{E} = \begin{pmatrix} A \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{q\pi}{c}z\right) \\ A \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{q\pi}{c}z\right) \\ A \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{q\pi}{c}z\right) \end{pmatrix}$	
Grezfrequenz Würfel	$ \vec{k} = \frac{\pi}{a} \sqrt{n^2 + m^2 + q^2} = \frac{\omega}{c_0}$ $\omega = \frac{c_0 \pi}{a} \sqrt{n^2 + m^2 + q^2}$	Volumen Kugeloktant mit Radius $ \vec{k} $: $V_k = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} k^3 = \frac{\pi}{6} \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^3$	Anzahl Gitterpunkte mit EH-Vol $(a/\pi)^3$: $N_G = \left(\frac{\omega}{\pi c_0}\right)^3 \frac{a^3}{\pi^3}$	Zwei Polarisationsrichtungen:	Moden pro Vol.: $\frac{N}{V} = n = \frac{8\pi\nu^3}{3c_0^3}$

Rechteckiger Hohlleiter

Querschnitt $\Delta x \cdot \Delta y = a \cdot b$ ($a > b$); Ausbreitung in z-Richtung	$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0(x, y) \cos(\omega t - k_z z); \vec{E}_0 = \begin{pmatrix} A \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\ B \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\ 0 \end{pmatrix}; k_x = \frac{n\pi}{a}; k_y = \frac{m\pi}{b}; n, m \text{ ablesen aus } TE_{nm}$		
TE _{nm} -Mode:	E steht senkrecht auf z-Richtung	TM _{nm} -Mode:	B steht senkrecht auf z-Richtung
$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}; k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$; Grenzfrequ. wenn $k_z = 0 \Rightarrow \omega_g = c\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}; TE_{10} = \frac{c\pi}{a}$		Phasen- geschw.:	$v_{ph} = \frac{\omega}{k_z}$
Schwächungslänge δ :		Gruppen- geschw.:	$v_{gr} = \frac{c^2}{v_{ph}}$
Wenn $\omega < \omega_g$, dann ist k_z komplex: $k_z = i \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}$; bzw. $ k_z = \frac{1}{\delta} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}$; nach δ Amplitude auf $\frac{1}{e}$			

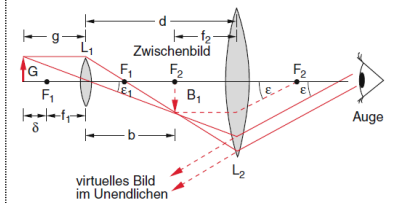
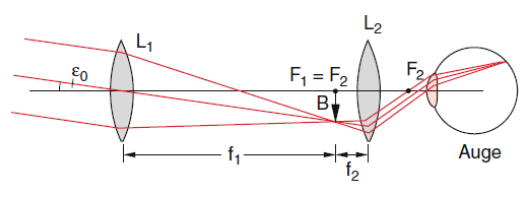
Elektromagnetische Wellen im Vakuum

Wellengleich. Für E-Feld in Vakuum ($j=0, \rho=0$)	Maxwell 3: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \mid \vec{\nabla} \times \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} \mid \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \text{ (Maxwell 4)} \Rightarrow$ $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \text{für } E_x: \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$		
Wellengleich. Für B-Feld in Vakuum ($j=0, \rho=0$)	Maxwell 4: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \mid \vec{\nabla} \times \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} \mid \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \text{ (Maxwell 3)} \Rightarrow$ $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow \text{für } B_x: \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2}$		
$\vec{B} \leftrightarrow \vec{E}$:	$\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}) \Rightarrow \vec{B} = \frac{k}{\omega} \vec{E} = \frac{1}{c} \vec{E} $	Energie Dichte:	$w_{EM} = \frac{\epsilon_0 (E^2 + c^2 B^2)}{2} = \epsilon_0 E^2$
EM-Welle ist transversal:	Ann: Ebene Welle in z-Richtung: $\vec{E} = \vec{E}(z) \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0 \dots (1) \text{ Maxwell 1 mit } \rho=0: \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow$ $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_z = \text{const.}, \text{ wähle } E_z = 0 \Rightarrow \vec{E} = (E_x, E_y, 0)^T \dots \text{ Transversalwelle: } \vec{E} \perp \vec{e}_z$		
Linear polarisiert	$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz)$	Zirkular polarisiert	$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \sin(\omega t - kz) \end{pmatrix} = \frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz)}$
Amplitude nach Polari- sationsfilter	$E_1 = E_0 \cos(\alpha)$	α... Drehung des Filters zur Polarisation von E_0	Inten- sität $I = \frac{W}{A} = \frac{P}{A} = \frac{W}{V} v = w_{EM} c = \epsilon_0 c \overline{E^2(t)} = \epsilon_0 c \frac{1}{T} \int_0^T \vec{E}^2(t) dt = \epsilon_0 c \left(\frac{E_{0x}^2}{2} + \frac{E_{0y}^2}{2} \right)$

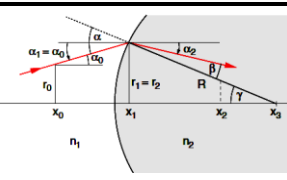
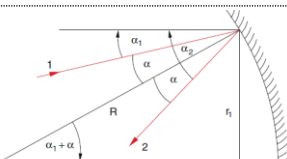
Elektromagnetische Wellen in Materie

Mikrosko- pisches klassisches Modell	Ann: Ebene Welle in z-Richtung, Polarisiert in x-Richtung. Jedes Atom-Elektron wird angeregt: $m\ddot{x} + b\dot{x} + Dx = -eE_0 e^{i(\omega t - kz)} \mid m \Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{D}{m} x = -\frac{eE_0}{m} e^{i\omega t} e^{-ikz} \mid \text{Ansatz } x = x_0 e^{i\omega t}$ $-\omega^2 x_0 e^{i\omega t} + i \frac{b}{m} \omega x_0 e^{i\omega t} + \frac{D}{m} x_0 e^{i\omega t} = -\frac{eE_0}{m} e^{i\omega t} e^{-ikz} \mid \frac{b}{m} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma, \frac{D}{m} \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0^2, z \stackrel{\text{def}}{=} 0 \Rightarrow -\omega^2 x_0 + i\gamma \omega x_0 + \omega_0^2 x_0 = -\frac{eE_0}{m}$ $x_0 (-\omega^2 + i\gamma \omega + \omega_0^2) = -\frac{eE_0}{m} \Rightarrow x_0 = -\frac{eE_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma \omega} \mid \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2} \right) \Rightarrow x_0 = -\frac{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma \omega)e/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2} E_0 = -(\alpha + i\beta) E_0 = -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} E_0 e^{i\varphi}$ $x_0 = \frac{e/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}} E_0 e^{i(\omega t + \varphi)} \mid \text{mit } \varphi = -\arctan\left(\frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \text{ Feld jedes Dipols mit } p = -ex: E_D = -\frac{e\omega^2 x_0}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \sin(\vartheta) e^{i\omega(t-r/c)}$ $E(z) = -\frac{e\omega^2 x_0}{4\pi\epsilon_0 c^2} e^{i\omega t} \Delta z \int_0^\infty N e^{-i\omega r/c} \frac{1}{r} \sin(\vartheta) 2\pi r dr \approx -i\omega \frac{\Delta z}{c} \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma \omega)} E_0 e^{i\omega(t-z/c)}$		
Brechungs- index	$n = n' - ki$ $n' = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$	$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma \omega)}$	N ... Ladungsträgerdichte γ ... Dämpfungskonstante
Optisch dün- nes Medium:	$n = \frac{c_0}{c'} \approx n' \approx 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma \omega)}$		
Leitendes Medium	$\omega_0 = 0 \Rightarrow n^2 = 1 + \frac{\sigma}{\epsilon_0(i\omega - \omega^2 \tau)}$	Leitfä- higkeit	$\sigma = \frac{Ne^2 \tau}{m_e} = \frac{Ne^2}{m_e \gamma} \left[\frac{1}{\Lambda m} \right]$
$\omega \tau \ll 1$; leit. Med.:	$n \approx (1 - i) \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}}; \alpha = \sqrt{\frac{2\omega \sigma}{\epsilon_0 c^2}}$		
$\omega \tau \gg 1$; leit. Med.:	$n \approx \sqrt{1 - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega^2 \tau}}; \alpha = \frac{2}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$		
Plasma- Frequenz:	$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0 \tau}}$	Snellius	$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}$
Fresnel Refl.koeff. Transm.k.	$R_s = \frac{A_{rs}^2}{A_{ts}^2} = \left(\frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} \right)^2 = \left(\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \right)^2$ $R_p = \frac{A_{rp}^2}{A_{tp}^2} = \left(\frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \beta}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} \right)^2 = \left(\frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \right)^2$ $R(0) = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2; T(0) = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$ Leitendes Medium: $R(0) = \frac{(n' - 1)^2 + \kappa^2}{(n' + 1)^2 + \kappa^2}$	Reflexion R	
Brewster- winkel α_B :	Wenn $\alpha_B + \beta = 90^\circ \Rightarrow$ $A_{rp} = 0; \alpha_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$	Total- reflexion	$n_1 > n_2$: TotRef. wenn $\sin(\alpha) > \frac{n_2}{n_1}$

Optik

Abbildungs- gleichung dünne Linse	$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ f ... Brennweite g ... Gegenstandsweite b ... Bildweite	Brennweite dünne Linse	$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$	Abbildungs- maßstab	$M = \frac{BB'}{AA'} = \frac{a}{b}$
Brennweite dicke Linse	$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)d}{nR_1R_2} \right)$	Haupt- achsen:	$h_1 = -\frac{(n-1)fD}{nR_2}; h_2 = -\frac{(n-1)fD}{nR_1}$	Linsen- system	$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1f_2}; h = \frac{d(f_1-f)}{f_1}$
Vergrößerun- g	$V = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument } \varepsilon}{\text{Sehwinkel ohne Instrument } \varepsilon_0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$	$V_{\text{Mikroskop}} = \frac{bs_0}{gf_1}$	$V_{\text{Fernrohr}} = \frac{f_1}{f_2}$	$V_{\text{Lupe}} = \frac{B/b}{G/s_0} = \frac{G/g}{G/s_0} = \frac{s_0}{g}$	Deutl. Sehweite $s_0 = 250\text{mm}$
Mikroskop			Kepler Fernrohr		
Strahlenweg einzelne Linse:	1. Brennpunkt F beim Gegenstand, F' beim Bild. Bei Zerstreuungslinse umgekehrt. 2. <u>Achsenparallelen Strahl</u> vom Gegenstand zur Linse zeichnen 3. Strahl verlässt die Linse bei der Linsenachse so, dass er durch F' läuft 4. <u>Mittelpunktsstrahl</u> gerade vom Gegenstand durch den Mittelpunkt der Linse zeichnen 5. <u>Brennpunktstrahl</u> durch F bis zur Linse führen, dort achsenparallel weiter bis zur horizontalen Position von F' zeichnen 6. Nur zwei der drei Strahlen sind zur Konstruktion notwendig. 7. Bei dicken Linsen verlaufen alle Strahlen zwischen den Linsenhauptachsen achsenparallel. 8. Wo sich die Strahlen schneiden, ist das Bild				
Strahlenweg Linsensystem	1. <u>Achsenparallelen Strahl</u> vom Gegenstand zur Linse zeichnen. 2. Der Strahl verlässt die 1. Linse bei der Linsenachse so, dass er durch F1' läuft 3. Strahl weiterführen bis Linse 2 4. <u>Parallele Hilfsgerade</u> durch die Mitte von Linse 2 ziehen. 5. Hilfsgerade weiter führen bis zur horizontalen Position von F2'. Dies sei der Punkt P. 6. Der Strahl verlässt Linse 2 bei der Linsenachse Richtung Punkt P 7. Wo der Strahl die waagrechte Achse schneidet, ist der gemeinsame Brennpunkt F des Linsensystems 8. Wenn man den letzten Strahl Richtung Linse 1 zurückzeichnet, und mit dem achsenparallelen Strahl von Punkt 1 schneidet, bekommt man die Position der Hauptachse des Linsen-Gesamtsystems				
Interferenz am Spalt	$I(\vartheta) = I_s \frac{\sin^2(x)}{x^2}; x = \frac{\pi b}{\lambda} \sin(\vartheta)$	Minima:	$\sin(\vartheta_n) = \frac{n\lambda}{b}; n \in \mathbb{N}_+$	Maxima:	$\sin(\vartheta_n) = \frac{(2n+1)\lambda}{2b}$
Interferenz am Gitter	$I(\vartheta) = I_s \frac{\sin^2(x_1) \sin^2(x_2)}{x_1^2 x_2^2}; x_1 = \frac{\pi b}{\lambda} \sin(\vartheta); x_2 = \frac{\pi d}{\lambda} \sin(\vartheta)$				
Phasen- verschieb.	$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta s}{\lambda} + \delta\varphi; \delta\varphi = \begin{cases} \pi & \text{wenn } n_2 > n_1 \\ 0 & \text{wenn } n_2 \leq n_1 \end{cases}$				
Auflösung : Rayleigh-Krit: Hauptmax. von A darf nicht näher als 1. min. von B	$\delta_{\min} = \frac{1,22 \lambda}{D_{\text{Linse}}}$	Min. Abst.	$\tan \frac{\delta}{2} \approx \frac{\delta}{2} = \frac{d/2}{g} \Rightarrow \frac{d_{\min}}{2g} = \frac{1,22 \lambda}{2 D_{\text{Linse}}} \Rightarrow d_{\min} = \frac{1,22 \lambda g}{D_{\text{Linse}}}$		Winkelauf- lösungsverm
Mikroskop Auf- lösung Rayleigh:	$d_{\min} = \frac{1,22 \lambda g}{D_{\text{Obj}}} \approx \frac{1,22 \lambda f}{D_{\text{Obj}}} \left \tan \alpha \approx \sin \alpha = \frac{D_{\text{Obj}}/2}{f} \Rightarrow d_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{2 \sin \alpha} = 1,22 \frac{\lambda_0}{2n \sin \alpha} = 0,61 \frac{\lambda_0}{n \sin \alpha} = 0,61 \frac{\lambda_0}{NA} \right $				
Fernrohr Auf- lösung Rayleigh:	$\tan \left(\frac{\delta}{2} \right) = \frac{d/2}{g} \Rightarrow \frac{\delta}{2} \approx \frac{d}{2g} \Rightarrow \delta = \frac{d}{g} \left \delta \stackrel{!}{=} \delta_{\min} = \frac{1,22 \lambda}{D_{\text{Linse}}} \Rightarrow \frac{1,22 \lambda}{D_{\text{Linse}}} = \frac{d}{g} \Rightarrow d_{\min} = \frac{1,22 \lambda g}{D_{\text{Linse}}} \right $				
Mikroskop Auf- lösung Abbe:	Doppelspalt erstes Max.	$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta s}{\lambda} \left \Delta\varphi \stackrel{!}{=} 2\pi \Rightarrow \Delta s = \lambda; \sin \alpha = \frac{\Delta s}{d} = \frac{\lambda}{d} \Rightarrow d_{\min} = \frac{\lambda}{\sin \alpha} = \frac{\lambda_0}{n \sin \alpha} = \frac{\lambda_0}{NA} \right $			

Matrixmethode in der Optik

Translations- matrix	$\left. \begin{aligned} \frac{r_1 - r_0}{d} &= \tan(\alpha_0) \approx \alpha_0 \\ \alpha_1 &= \alpha_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ n\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$	Brechung an Kugel:	 $\alpha - \alpha_1 = -\alpha_2 + \beta = \gamma = \frac{r_1}{R}$ $\text{Snellius: } n_1 \alpha = n_2 \beta$ $n_1(\gamma + \alpha_1) = n_2(\gamma + \alpha_2) \quad \begin{pmatrix} r_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1 - n_2} & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ $n_1 \left(\frac{r_1}{R} + \alpha_1 \right) = n_2 \left(\frac{r_1}{R} + \alpha_2 \right)$ $n_2 \alpha_2 = n_1 \alpha_1 + (n_1 - n_2) \frac{r_1}{R}$
Dünne Linse in Luft	$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$	Reflexions- matrix	 $r_2 = r_1$ $\alpha_2 = 2\alpha + \alpha_1$ $\alpha_2 = 2(\alpha + \alpha_1) - \alpha_1$ $\alpha_2 = -2\frac{r_1}{R} - \alpha_1 \quad \begin{pmatrix} r_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ -\frac{2}{R} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$

Vielstrahl-Interferenz (Airy, Fabry-Pérot):

$A = \pm A_1 - A_2 e^{i\Delta\varphi} - A_3 e^{i2\Delta\varphi} - A_4 e^{i3\Delta\varphi} \dots = \pm \sqrt{R} A_0 \mp \sqrt{R}(1-R) A_0 e^{i\Delta\varphi} \mp \sqrt{R}(1-R) R A_0 e^{i2\Delta\varphi} \mp \sqrt{R}(1-R) R^2 A_0 e^{i3\Delta\varphi} \dots$ $A = \pm A_0 \sqrt{R} (1 - (1-R) \sum_{m=0}^{\infty} R^m e^{i(m+1)\Delta\varphi}) = \pm A_0 \sqrt{R} (1 - (1-R) e^{i\Delta\varphi} \sum_{m=0}^{\infty} R^m e^{im\Delta\varphi}) = \pm A_0 \sqrt{R} (1 - (1-R) e^{i\Delta\varphi} \frac{1}{1 - R e^{i\Delta\varphi}})$ $A = \pm A_0 \sqrt{R} \frac{1 - R e^{i\Delta\varphi} - e^{i\Delta\varphi} + R e^{i\Delta\varphi}}{1 - R e^{i\Delta\varphi}} = \pm A_0 \sqrt{R} \frac{1 - R e^{i\Delta\varphi} - e^{i\Delta\varphi} + R e^{i\Delta\varphi}}{1 - R e^{i\Delta\varphi}} = \pm A_0 \sqrt{R} \frac{1 - e^{i\Delta\varphi}}{1 - R e^{i\Delta\varphi}} \dots (1) \quad I_R = c \varepsilon_0 A A^* = c \varepsilon_0 A_0^2 R \frac{1 - e^{i\Delta\varphi}}{1 - R e^{i\Delta\varphi}} \frac{1 - e^{-i\Delta\varphi}}{1 - R e^{-i\Delta\varphi}} \Rightarrow$			
Airy-Formeln	$I_R = I_0 \frac{F \sin^2(\Delta\varphi/2)}{1 + F \sin^2(\Delta\varphi/2)} \quad I_T = I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2(\Delta\varphi/2)}$	mit $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$ und $\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta s}{\lambda}$ und $\Delta s = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}$	
Fabry-Pérot ⇒ α=0	$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta s}{\lambda} = \frac{4\pi nd}{\lambda} \stackrel{!}{=} 2m\pi \Rightarrow \boxed{\lambda_m = \frac{2nd}{m}}$	Freier Spektralbereich	
	HW-Breite: $\Delta\nu = \frac{c}{2nd} \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}}$	Finesse:	

Fourier-Reihen und Fourier-Transformation:

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n) \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \varphi_n = \arctan \frac{a_n}{b_n}$	
Periode 2π:	$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$
Periode T:	$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx$
Bei geraden Funktionen $f(-x)=f(x)$ nur $\cos(nx)$ -Terme, bei ungeraden Funktionen $f(-x)=-f(x)$ nur $\sin(nx)$ -Terme.	
Fourier-Transformation:	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$

Sonstiges:

Nabla Operator:	$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$	Gradient von $f(\vec{r})$:	$\text{grad}(f(\vec{r})) = \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix}$	Divergenz von $\vec{v}(\vec{r})$: (wenn $0 \Rightarrow$ quellenfrei)	$\text{div} \begin{pmatrix} v_x(\vec{r}) \\ v_y(\vec{r}) \\ v_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} v_x(\vec{r}) \\ v_y(\vec{r}) \\ v_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial z}$ $>0 \dots$ Quelle, $<0 \dots$ Senke, $0 \dots$ ohne Quelle und Senke inkompressible Flüssigkeit: $\forall \vec{r}: \vec{\nabla} \vec{v}(\vec{r}) = 0$		
Rotation von $\vec{v}(\vec{r})$:	$\text{rot} \begin{pmatrix} v_x(\vec{r}) \\ v_y(\vec{r}) \\ v_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} v_x(\vec{r}) \\ v_y(\vec{r}) \\ v_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial x} - \frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial y} \end{pmatrix}$			Wenn 0 : wirbelfrei $\Rightarrow$ $\exists$ Potential $\nabla \phi = \vec{v}(\vec{r})$	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$ ("Gradientenfeld ist wirbelfrei") $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$ ("Feld der Rotation ist quellenfrei") $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \Delta f$ $\vec{\nabla} \cdot (f \vec{v}) = (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{v} + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$ $\vec{\nabla} \times (f \vec{v}) = (\vec{\nabla} f) \times \vec{v} + f(\vec{\nabla} \times \vec{v})$ $\vec{\nabla} \times \vec{v} \times \vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v}$ $\vec{\nabla} \cdot (f \vec{v} g) = (\vec{\nabla} f) \cdot (\vec{v} g) + \Delta g$ $\vec{\nabla}(fg) = f(\vec{\nabla} g) + g(\vec{\nabla} f)$ $\vec{\nabla} \cdot (f \vec{v}) = f(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \vec{v}(\vec{\nabla} f)$ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ ("BAC-CAB-Regel")		
Laplace-Operator von $f(\vec{r})$ (skalar)	$\vec{\nabla}^2 f(\vec{r}) = \text{div}(\text{grad}(f(\vec{r})))$ $\vec{\nabla}^2 f(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f(\vec{r}))$ $\vec{\nabla}^2 f(\vec{r}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	Laplace-Operator vektoriell	$\vec{\nabla}^2 \begin{pmatrix} v_x(\vec{r}) \\ v_y(\vec{r}) \\ v_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta v_x(\vec{r}) \\ \Delta v_y(\vec{r}) \\ \Delta v_z(\vec{r}) \end{pmatrix}$				
„Taylors“ f. kleine x	$e^x \approx 1 + x; \frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x; \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}; \frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}; \frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2}; \sin x \approx x; \tan x \approx x; \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$						
Komplexe Zahl	$z = a + bi; a = z \cos \varphi; b = z \sin \varphi$	Polarform:	$z = z (\cos \varphi + i \sin \varphi) = z e^{i\varphi}; z = \sqrt{a^2 + b^2}; \varphi = \arctan \frac{b}{a}$				
Flächenelement in Kugelkoordinaten:	$dA = r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta$	Kugel-volumen:	$V_K = \frac{4}{3} \pi R^3$	Kugel-oberfl.:	$A_K = 4\pi R^2$	Brechungs-index:	$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_{ph1}}{v_{ph2}}$

Physik I

Stand 15.08.2021

Koordinatensysteme

Kugel $\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = r \cos \vartheta \end{pmatrix}; \det \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)} \right) = r^2 \sin \vartheta$	Zylinder $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}; \det \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} \right) = r; \left \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right = \sqrt{r^2 + z^2}$
--	--

Kinematik

Linear: $\vec{v} = \int \vec{a} dt = \vec{v}_0 + \vec{a}t; \vec{s} = \int \vec{v} dt = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}}{2} t^2$	Kreis: $\vec{\omega} = \int \dot{\vec{\omega}} dt = \vec{\omega}_0 + \dot{\vec{\omega}} t; \vec{\varphi} = \int \vec{\omega} dt = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{\dot{\vec{\omega}}}{2} t^2$
Kreis→Lin. $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2\pi f; s = r\varphi; \vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \end{pmatrix}; \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin \omega t \\ +r\omega \cos \omega t \end{pmatrix}; \vec{a}_t = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$	Frequenz: $f = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}$
Allg. Bew. $\vec{a} = \frac{d(v\vec{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + v \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + v \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_n = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n$	
Rot. Syst: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{s}; \vec{a}' = \vec{a} + 2\vec{v}' \times \vec{\omega} + \vec{\omega} \times (\vec{s} \times \vec{\omega}) = \vec{a} + \text{Coriolis} + \text{Zentrifugal}$	Zentripetalbeschleunigung: $\vec{a}_z = -r\omega^2 \vec{e}_r$

Newton

Axiom 1: $\vec{p} = m\vec{v};$	Axiom 2: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$	Axiom 3: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Rightarrow \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const.}$
Gravitation $\vec{F}_G = m\vec{g} = -\frac{GmM}{r^2} \vec{e}_r$	Feldstärke: $\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_G}{m} = \vec{g} = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r$	Potential $\phi = -\int \vec{g}(\vec{r}) d\vec{r} = -\frac{GM}{r}; \vec{g}(\vec{r}) = -\nabla \phi$
Impuls: $\vec{p} = m\vec{v}; \left[\frac{kg m}{s} \right]$	Drehimpuls: $\vec{L} = I\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = m(\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) = m(\vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})) = mr^2 \vec{\omega}; \left[\frac{kg m^2}{s} \right]$	
Kraft: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt} = m\vec{a} + \vec{v} \frac{dm}{dt}; \left[\frac{kg m}{s^2} \right], [N]$	Drehmoment $\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}; [Nm] = \left[\frac{kg m^2}{s^2} \right]$	
Arbeit: $W = \int \vec{F} d\vec{s} = \int P dt; [J] = [Nm] = [Ws] = \left[\frac{kg m^2}{s^2} \right]$	Arbeit: $W = \int \vec{D} d\varphi$	
Energie: $E_{pot}^{grav} = mgh; E_{pot}^{grav} = \phi m = -\frac{GmM}{r}; E_{kin} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \frac{\partial E_{kin}}{\partial p} = \frac{p}{m} = v$	Energie: $E_{rot} = \frac{1}{2} \int v(\vec{r}_\perp)^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int r_\perp^2 dm = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{I\omega^2 I}{2I} = \frac{L^2}{2I}$	
Leistung: $P = \frac{dW}{dt} = \frac{d \int \vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}; [W] = \left[\frac{J}{s} \right] = \left[\frac{kg m^2}{s^3} \right]$	Leistung: $P = \vec{D} \cdot \vec{\omega}$	
Planetenbahn: $E_{pot} = -\frac{GmM}{r} \dots (1); E_{kin} = \frac{mv^2}{2} \dots (2) \vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_t \vec{e}_t \Rightarrow \vec{v}^2 = v_r^2 + v_t^2 \xrightarrow{(2)} E_{kin} = \frac{m}{2} (v_r^2 + v_t^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) \Rightarrow E_{kin} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \left(\frac{L}{mr^2} \right)^2) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} \dots (3) E = E_{pot} + E_{kin} \xrightarrow{(1),(3)} = -\frac{GmM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{m\dot{r}^2}{2} = E_{pot}^{eff} + E_{kin}^{rad}$		

Spezielle Relativitätstheorie

Gamma:	$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \beta = \frac{v}{c}$	Ort $x = \gamma(x' + vt')$ $y = y'$ $z = z'$		Geschw. $v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}}; v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1 + \frac{v'_x v}{c^2})}; v_z = \frac{v'_z}{\gamma(1 + \frac{v'_x v}{c^2})}$ $v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v'_x v}{c^2}}; v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{v'_x v}{c^2})}; v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{v'_x v}{c^2})}$	
Zeitpunkt:	$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$ $t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$	Dauer: $\tau = \gamma\tau_0$ Masse: $m = \gamma m_0$	Länge: $l = \frac{l_0}{\gamma}$	Frequenz $f_B = f_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}; f_R = f_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}; f_{\text{transversal}} = \frac{f_0}{\gamma}$	
Impuls:	$\vec{p} = m(\vec{v}) \vec{v} = \gamma m_0 \vec{v} = \text{const.}$			$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 = E_0^2 \dots \text{invariant}$	
Invariante	$(c\tau)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = (\Delta s)^2; (\Delta s)^2 > 0$: zeitartig; $(\Delta s)^2 < 0$: raumartig; $(\Delta s)^2 = 0$: lichtartig.				
Energie:	$E = E_0 + E_{\text{kin}} = m_0 c^2 + mc^2 - m_0 c^2 = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}; E_{\text{kin}} = E - E_0 = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2$				

Schwerpunktsystem

$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$	$\vec{v}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{p}_{ges}}{M}$	$\sum p_{is} = 0$	$\vec{v}_i = \vec{v}_{is} + \vec{v}_s$ $\vec{v}_{is} = \vec{v}_i - \vec{v}_s$	Reduzierte Masse: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$
$E_{kin} = E_{kin}^{im SPS} + E_{kin}^{des SPS} = \frac{1}{2} \mu v_{12}^2 + \frac{1}{2} M v_s^2$		Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{L}_s^{im SPS} + \vec{L}_{s0}^{des SPS}; \vec{L}_s = \sum m_i (\vec{r}_{is} \times \vec{v}_{is}) = \vec{r}_{12} \times \mu \vec{v}_{12}; \vec{L}_{s0} = M(\vec{r}_s \times \vec{v}_s);$		

Trägheitsmoment

$I = \int_K r^2 dm = \rho \int_K r^2 dV = \frac{m}{V_K} \int_K r^2 dV; [kg m^2]$		$dV = dx dy dz = r^2 \sin \vartheta \cdot dr d\varphi d\vartheta = r \cdot dr d\varphi dz$
I zusammensetzen aus Teilstücken mit bekanntem TM $dl = f(K)dm$; Rot.-Achse „passend“:		$I = \int_K f(K) dm = \rho \int_K f(K) dV = \frac{M}{V} \int_K f(K) dV$
Steiner: $I' = I + mr^2$	I zusammensetzen aus Teilstücken parallel zur Rot.-Achse R mit bekanntem Trägheitsmoment I dm entlang einer Koordinate $k \perp R$:	$I' = \int_k \left(\frac{I}{dm} + k^2 \right) dm = \frac{M}{k_e - k_a} \int_{k_a}^{k_e} \left(\frac{I}{dm} + k^2 \right) dk$
$V_{Kugel} = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta = \frac{4}{3} \pi R^3$	$V_{Zyl} = \int_{z=0}^h \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R r dr d\varphi dz = \pi R^2 h$	$O_{Kugel} = 4\pi R^2$
Massepunkt, Ring, Zylindermantel: $I = mr^2$	Ring ($\emptyset$ -Achse), Kreisscheibe, Vollzylinder: $I = \frac{m}{2} r^2$	Hohlzylinder: $I = \frac{m}{2} (r_2^2 - r_1^2)$
Kugelschale $I = \frac{2}{3} mr^2$	Kreisscheibe ($\emptyset$ -Achse) $I = \frac{m}{4} r^2$	Stab (Achse durch MP) $I = \frac{m}{12} l^2$
Kugel: $I = \frac{2}{5} mr^2$	Quader (z-Achse): $I_z = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$	Vollzylinder, Achse $\perp$ Körperachse durch MM $I = \frac{m}{4} r^2 + \frac{m}{12} l^2$
Messung I: $T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I_A}{D_r}}$; $D_r: T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{D_r}}$; $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + mr^2/2}{D_r}}$; $T_1^2 - T_0^2 = \frac{2\pi^2 mr^2}{D_r}$		

Rotation starrer ausgedehnter Körper

Schwerpunkt: $\vec{s} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$	Homogen: $\vec{s} = \frac{\rho}{M} \int_V \vec{r} dV = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV$	Bew. eines Punktes im Körper mit $\vec{\omega}$ raumfest	$\vec{v}_i = \vec{v}_s + \vec{v}_{is} = \vec{v}_s + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{is})$
Raumfeste Achse $\parallel \vec{e}_z$	$\vec{D} = (\vec{r}_1 \times \vec{F}) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_z + \vec{r}_1 \times \vec{F}_t + \vec{r}_1 \times \vec{F}_n$; $\vec{F}_z$ wird aufgefangen, $\vec{F}_t$ bewirkt $\vec{D}_{\parallel}$ zu Achse		
Drehimpuls:	$d\vec{L} = \vec{r}_1 \times d\vec{p} = \vec{r}_1 \times (dm \vec{v}) = dm (\vec{r}_1 \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_1)) = dm (\vec{\omega} r_1^2 - \vec{r}_1 (\vec{r}_1 \cdot \vec{\omega})) = r_1^2 dm \vec{\omega} \Rightarrow \vec{L} = \int r_1^2 dm \vec{\omega} = I \vec{\omega}$		
BWGL:	$\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \ddot{\vec{\varphi}} \Rightarrow \ddot{\vec{\varphi}} = \frac{\vec{D}}{I}; \vec{\omega} = \int \ddot{\vec{\varphi}} dt = \frac{\vec{D}}{I} t + \vec{\omega}_0; \vec{\varphi} = \int \vec{\omega} dt = \frac{\vec{D}}{2I} t^2 + \vec{\omega}_0 t + \vec{\varphi}_0$		
Rollender Körper, kinetisch:	$D = I \ddot{\omega} \Rightarrow mg \sin(\alpha) r = (I_s + mr^2) \frac{a}{r} \Rightarrow a = \frac{mg \sin(\alpha) r^2}{I_s + mr^2} = \frac{mg \sin(\alpha)}{I_s/r^2 + m}$		
Energie:	$E_{pot} \triangleq E_{kin} + E_{rot} \Rightarrow mgs \sin(\alpha) = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \left(1 + \frac{I\omega^2}{mv^2} \right) = \frac{mv^2}{2} \left(1 + \frac{I}{mr^2} \right) \Rightarrow (v^2)' = \left(\frac{2g \sin(\alpha)}{1 + \frac{I}{mr^2}} \right)' = av + va = 2av \Rightarrow \dots$		

Kreisel

Trägheitstensor:	$d\vec{L} = dm (\vec{\omega} \vec{r}_\perp^2 - \vec{r}_\perp (\vec{r}_\perp \cdot \vec{\omega})) \text{ (s.O.)} \Rightarrow \vec{L} = \int (\vec{\omega} \vec{r}_\perp^2 - \vec{r}_\perp (\vec{r}_\perp \cdot \vec{\omega})) dm = \int r^2 \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} dm - \int (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dm$		
$\begin{aligned} L_x &= \int r^2 \omega_x dm - \int (x^2 \omega_x + xy\omega_y + xz\omega_z) dm &= \int (r^2 - x^2) \omega_x dm - \int xy\omega_y dm - \int xz\omega_z dm &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\ L_y &= \int r^2 \omega_y dm - \int (xy\omega_x + y^2 \omega_y + yz\omega_z) dm &= \int xy\omega_x dm - \int (r^2 - y^2) \omega_y dm - \int yz\omega_z dm &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \\ L_z &= \int r^2 \omega_z dm - \int (xz\omega_x + xy\omega_y + z^2 \omega_z) dm &= \int xz\omega_x dm - \int yz\omega_y dm - \int (r^2 - z^2) \omega_z dm &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z \end{aligned}$			
$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \vec{I} \cdot \vec{\omega}$	Energie	$E_{rot} = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} dm (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \frac{1}{2} (\omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2) dm = \frac{\vec{\omega}^2}{2} \int r^2 dm - \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2 dm \Rightarrow$	
$\begin{aligned} E_{rot} &= \frac{1}{2} (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) \int r^2 dm - \frac{1}{2} \int (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)^2 dm \Rightarrow \\ E_{rot} &= \frac{1}{2} (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) \int r^2 dm - \frac{1}{2} \int (x^2 \omega_x^2 + y^2 \omega_y^2 + z^2 \omega_z^2 + 2\omega_x \omega_y xy + 2\omega_x \omega_z xz + 2\omega_y \omega_z yz) dm \Rightarrow \\ E_{rot} &= \frac{1}{2} \omega_x^2 \int (r^2 - x^2) dm + \frac{1}{2} \omega_y^2 \int (r^2 - y^2) dm + \frac{1}{2} \omega_z^2 \int (r^2 - z^2) dm - \omega_x \omega_y \int xy dm - \omega_x \omega_z \int xz dm - \omega_y \omega_z \int yz dm \Rightarrow \\ E_{rot} &= \frac{1}{2} (\omega_x^2 I_{xx} + \omega_y^2 I_{yy} + \omega_z^2 I_{zz}) + \omega_x \omega_y I_{xy} + \omega_x \omega_z I_{xz} + \omega_y \omega_z I_{yz} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega} \end{aligned}$			
Hauptträgheitsmomente	Diagonalisierung von $\vec{I}$ (i.e. löse $\vec{I} - \lambda E = 0$) $\Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \omega_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_a \omega_a \\ I_b \omega_b \\ I_c \omega_c \end{pmatrix} = \vec{I}^* \cdot \vec{\omega}^*$		$I_a < I_b < I_c$. Achsen a, b, c fixiert am Kreisel. $I(\omega)$: Ellipsoid. $I_a < I_b = I_c \dots$ prolat symmetrisch $I_a = I_b < I_c \dots$ oblat symmetrisch $I_a = I_b = I_c \dots$ sphärisch
Energie:	$E_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^{*T} \cdot \vec{I}^* \cdot \vec{\omega}^* = \frac{1}{2} (\omega_a^2 I_a + \omega_b^2 I_b + \omega_c^2 I_c) = \frac{L_a^2}{2I_a} + \frac{L_b^2}{2I_b} + \frac{L_c^2}{2I_c} \Rightarrow \text{Rotation um Achse mit } E_{\min} \triangleq \text{Achse mit } I_{\max} (r_{\max})$		
Drallsatz	$\vec{D} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_K + (\vec{\omega}_K \times \vec{L}_K)$	Euler gleich	$D_a = I_a \frac{d\omega_a}{dt} + (I_c - I_b) \omega_b \omega_c; D_b = I_b \frac{d\omega_b}{dt} + (I_a - I_c) \omega_c \omega_a; D_c = I_c \frac{d\omega_c}{dt} + (I_b - I_a) \omega_a \omega_b$
Nutation:	$\text{äußeres } \vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}; \text{ Spitze von } \vec{L} \text{ liegt auf Schnittpunkt von Trägheitsellipsoid und Kugel } L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = \text{const.};$		
Präzession	$\text{sei } \vec{\omega} = \vec{L} \text{ und äußeres } \vec{D} = m\vec{g}\vec{r}. \text{ Dann: } d\vec{L} = \vec{D} dt = L d\varphi \Rightarrow \vec{D} = L \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow mgr = L\omega_p \Rightarrow \omega_p = \frac{mgr}{L} = \frac{mgr}{I\omega}$		

Elastische Körper

Hookesches Gesetz	$F = EA \frac{\Delta L}{L} \Leftrightarrow \frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L} \Leftrightarrow \sigma = E \cdot \varepsilon$		Elastizitätsmodul $[E] = \frac{N}{m^2}$; Zugspannung $[\sigma] = \frac{N}{m^2}$; Rel. Dehnung $[\varepsilon] = 1$	
Biegepfahl	$s = \frac{L^3}{3EB} F$	Beiderseits eingespannt	$s_{max} = \frac{s}{16}$ (weil $\frac{F}{2}$ auf $2x \frac{L}{2}$)	Deform.-arbeit $W_{Def} = V \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon = \frac{1}{2} EV \varepsilon^2$
Flächenträgheitsmoment	$B = \iint z^2 dy dz; [m^4]$	Rechteckbalken:	$B = \frac{bd^3}{12}$ $b = \Delta y$ $d = \Delta z$	Rund-Balken: $B = \frac{\pi}{4} R^4$ Rohr: $B = \frac{\pi}{4} (R_1^4 - R_2^4)$
Schubmodul	$G = \frac{\tau}{\alpha}$ mit $\tilde{\tau} = \frac{F}{A}$; τ ... Scherspannung	Richtmoment	$D = -\frac{\pi GR^4}{2L} \varphi = -D_r \varphi$	$\frac{2G}{3K} = \frac{1-2\mu}{1+\mu}$
Kompres-sionsmodul	$F = -KA \frac{\Delta V}{V} \Leftrightarrow \Delta p = -K \frac{\Delta V}{V} \Leftrightarrow K = -V \frac{\Delta p}{\Delta V} = -V \frac{dp}{dV}$	Kompressibilität:	$\kappa = \frac{1}{K}$	Poisson-zahl: $\mu = \frac{\Delta d/d}{\Delta l/l}$; $\frac{\Delta V}{V_0} = \epsilon(1-2\mu)$

Flüssigkeiten und Gase

Gasgleichung ideales Gas	$pV = Nk_B T = nRT$	$R = N_A k_B$ $N = n \cdot N_A$	Hydrost Druck	$p(z) = \rho g(H - z)$	Barom. Höhenf.	$p(h) = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}$	Auf- trieb	$\vec{F}_A = -\vec{F}_{GFI}$; Eisberg: $\rho_{Eis} V_{Eis} g = \rho_W V_{Eis}^W g$
Statischer Druck:	$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$; $[Pa] = \left[\frac{N}{m^2}\right] = \left[\frac{kg}{ms^2}\right]$	Gesetz v. Hagen- Poiseuille: Strömung in Rohren					$I \equiv \frac{dV}{dt} = \frac{\pi r^4}{8\eta l} (p_1 - p_2)$; $\left[\frac{m^3}{s}\right]$	
Euler Gleichg ideale Flüss.	$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} u_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} u_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} u_z = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \vec{u} \Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u} \dots (1)$ $\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_p = m\vec{a} = \rho \Delta V \frac{d\vec{u}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\vec{F}_G + \vec{F}_p}{\rho \Delta V} = \frac{\rho \Delta V \vec{g} - \nabla p \Delta V}{\rho \Delta V} = \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho} \dots (2) \Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u} = \vec{g} - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho}$							
Navier- Stokes	$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u}$		Visko- sität:	$[\eta] = \frac{kg}{sm} = Pa \cdot s$ mit $F_r = -\eta A \left \frac{du}{dy} \right $		Reynolds- zahl	$Re = \frac{2E_{kin}}{W_{reibung}}$	
Stromdichte (Flussdichte)	$j = \rho \cdot \vec{u} = \frac{dM}{dV} \frac{dx}{dt} = \frac{dM/dt}{A}$		Massenstrom- stärke:	$I = jA = \frac{dM}{dt} = \rho \vec{u} A = - \int_A \rho \vec{u} \cdot d\vec{A}$				
Kontinuitäts- gleichung:	$-\frac{\partial M}{\partial t} = \int_A \rho \vec{u} \cdot d\vec{A} \stackrel{Gauß}{=} \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \cdot dV$; $-\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$						Inkom- press.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$
Dyn. Druck (Bernoulli):	$E = E_{pot} + E_{kin} = pV + \frac{1}{2} \rho V u^2 = const. \rightarrow p + p_s = p + \frac{1}{2} \rho u^2 = const.$; p ...statischer Druck p_s ...Staudruck							$u_1 A_1 = u_2 A_2$
Stokesches Gesetz	$F_R = -6\pi\eta R \cdot \vec{u}$		$F_G + F_A = F_R \Rightarrow \left(\frac{3}{4} \pi R^3\right) (\rho_K - \rho_{FL}) g = 6\pi\eta R u_{end} \Rightarrow u_{end} = \frac{2R^2(\rho_K - \rho_{FL})}{9\eta} g$					

Betrachtung auf Teilchenebene

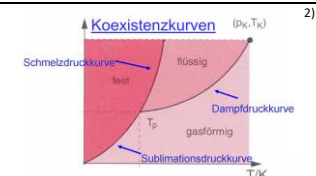
Maxwellsche Geschw. Verteilung	$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$	Wahrsch. Geschw.	$u_w = \arg(\max(f(v))) = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$	
Mittlere Geschw.:	$\bar{v} = \int_0^\infty v f(v) dv = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} u_w$	Mittleres Geschw. quadrat	$v_{rms} = \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\int_0^\infty v^2 f(v) dv} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$	Mittlere kinetische Energie $\bar{E}_{kin} = \frac{f}{2} k_B T = \frac{m}{2} \bar{v}^2$
Kalorische Zustandsgl.	$E_{kin} = \frac{1}{2} k_B T$ (pro Freiheitsgrad); $E_{kin} = \frac{f}{2} k_B T$ (pro Teilchen) $\rightarrow \bar{U} = \frac{f}{2} N k_B T = \frac{f}{2} nRT$ (für N Teilchen od. n Mol)			
Freiheitsgr. Fluide	$f = f_{trans} + f_{rot} + 2f_{vib}$	$f_{trans} = 3$; $f_{rot} = \begin{cases} 2 \text{ (lineares Molekül)} \\ 3 \text{ (nicht lin. Molekül)} \end{cases}$; $f_{vib} = \begin{cases} 3n - 5 \text{ (lineares Molekül)} \\ 3n - 6 \text{ (nicht lin. Molekül)} \end{cases}$		
Freiheitsgr. Festkörper	$f = 2f_{vib} = 2(3n - 6)$			
Mittlere Stoßzeit	$\tau \cong \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma v_{rms}}$; $n = \frac{N}{V}$; $\sigma = \pi(r_1 + r_2)^2 = \pi d^2$	Mittlere freie Weglänge	$\Lambda \cong \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma}$	

Koexistenzkurven (p_K, T_K)

Das Diagramm zeigt die Koexistenzkurven (p_K, T_K) für ein System. Die Schmelzdruckkurve (rot) verläuft von links unten nach rechts oben, was auf eine negative Steigung hindeutet. Die flüssig- und fest-Regionen sind rot schattiert, die Dampfdruckkurve ist blau schattiert.

Reale Gase (Van-der-Waals-Gleichung)

$\left(p + \frac{n^2 a}{V_m^2}\right) (V_m - nb) = nRT$	$a \dots \text{Stoffkonstante}$ $b = 4N_A V_a = 4N_A \frac{4\pi}{3} r_a^3$	Krit. Temp.:	$T_k = \frac{8a}{27Rb}$	Krit. Druck:	$p_k = \frac{a}{27b^2}$	Krit. Vol.	$V_k = \frac{3b}{8}$	$\frac{p_k V_k}{RT_k} = \frac{3}{8}$	Oberh. der kritischen Temp. kann Gas nicht verflüssigt werden.
Kalorische Zustandsgleichung:	$U = E_{kin} + E_{pot} = \frac{f}{2} RT - \frac{a}{V}$	Molare Schmelzw.	$\Lambda_{schm} = T \frac{dp}{dT} (V_{fl} - V_{fest})$			Boyle Temp.	$T_b = \frac{a}{bR}$	Bei T_b verh. sich Gas annähernd ideal	



²⁾ Abb. aus: Wolfgang Demtröder (2015): Experimentalphysik 1. Mechanik und Wärme. 7. Auflage. Springer, S. 215, mit Ergänzungen durch den Autor.

Diffusion in Gasen und Wärmeleitung

Erstes Ficksches Gesetz (Diffusion in x-Richtung)	$j_x \equiv \frac{dN}{dA dt} \hat{e}_A = -D \frac{dn}{dx}$; $D = \frac{D_0}{3} = \frac{1}{n\sigma} \sqrt{\frac{8kT}{9\pi m}}$	allgemein:	$\vec{j} = -D \text{ grad } n$	2. Ficksches Gesetz (Diffusionsgleichung)	$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2}$
j...Teilchenstromdichte $\left[\frac{1}{m^2 s}\right]$; N... Teilchenzahl; n... Teilchenkonz. $\left[\frac{1}{m^3}\right]$; D...Diff.konstante $\left[\frac{m^2}{s}\right]$; Λ ...mittl. freie Weglänge; σ ...Stoßquerschnitt					
Wärmestrom:	$I = \frac{dQ}{dt} = -\lambda A \frac{dT}{dx}$; $\left[\frac{J}{s}\right]$	Wärmeleitfähigkeit $[\lambda] = \left[\frac{W}{Km}\right]$	k-Wert $k = \frac{\lambda}{d}$; $\left[\frac{W}{Km^2}\right]$	Wärmeübergangszahl	$\kappa \triangleq k; [\kappa] = \left[\frac{W}{Km^2}\right]$
Wärmewiderst. / m ²	$\frac{1}{k_{ges}} = \sum \frac{1}{k_i} + \sum \frac{1}{\kappa_i}$	$\frac{\Delta T_i}{\Delta T_{ges}} = \frac{1/k_i}{1/k_{ges}} = \frac{k_{ges}}{k_i}$	Wärmestromdichte	$q = k \Delta T$; $\left[\frac{W}{m^2}\right]$	

Thermodynamik

1. HS	Jedes System besitzt eine innere Energie U (extensive Zustandsgröße). Diese kann sich nur über den Transport von mechanischer Arbeit W und Wärme Q über die Systemgrenzen ändern.				
Fundamentalgleichung 1.HS	$dU = d'Q + d'W$ $dU = d'Q - p dV$ $dU = TdS - p dV$	d': Kein totales Differential (z.B. bei konstantem Druck)	dU ... Zunahme inn. Energie $d'Q$... Zuführte Wärme $d'W$... Zuführte Arbeit	U ... Zustandsgröße Q ... keine Zustandsgröße W ... keine Zustandsgröße	Zugeführte Wärme $\Rightarrow$ Erhöhung Enthalpie $H=U+pV$
Isochor V=const.	$d'W = 0 \Rightarrow (dU)_V = d'Q = nc_v dT$	$c_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{f}{2} N_A k_B = \frac{f}{2} R$... spez. Molwärme $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$	Zugeführte Wärme $\Rightarrow$ Erhöhung von U $\Delta Q=Q \Delta T$		
isobar p=const.	$(dH)_p = d'Q = dU - d'W = nc_v dT + p dV = nc_v dT + nR dT$	$c_p = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_p = c_v + R = \frac{f}{2} R + R$	$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$ $\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) = nR(T_2 - T_1)$	Zugeführte Wärme $\Rightarrow$ Erhöhung der Enthalpie H=U+pV	
isotherm T=const.	$dU = 0$ (bei i.G. $dU \propto dT$) $d'Q = -d'W$	$\Delta W = Nk_B T \ln \frac{V_1}{V_2} = Nk_B T \ln \frac{p_2}{p_1}$	$p_1 V_1 = p_2 V_2$	Zugeführte Wärme $\Rightarrow$ Arbeit	
adiabat. d'Q=0	$d'Q = 0$ $dU = d'W$	$TV^{\kappa-1} = const.$ $pV^{\kappa} = const.$ $\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{f+2}{f}$	$\Delta W_{ad} = \frac{Nk_B}{\kappa-1} (T_2 - T_1)$	$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\kappa-1} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{\kappa}}$	
polytrop	$pV^n = const.; n = 0 \dots isobar; n = 1 \dots isotherm; n \rightarrow \infty \dots isochor; n = \kappa \dots adiabat$				$\Delta Q = mc_v \frac{n-\kappa}{n-1} (T_2 - T_1)$
2. HS	$\eta = \frac{ \Delta W }{Q_{zugef}} = 1 - \frac{T_k}{T_w} < 1$	Energie = Exergie + Anergie $\Delta Q_w = -\Delta W - \Delta Q_k$	Carnot-Prop.: $\frac{\Delta Q_w}{T_w} + \frac{\Delta Q_k}{T_k} = 0$	Clausius: $\oint \frac{d'Q}{T} = 0$	
3. HS	Entropie: Extensives Maß für Energie, die nicht für Arbeit verfügbar ist; für die Unordnung und die Multiplizität eines Systems.				
Entropie	$dS = \frac{d'Q_{rev}}{T}; \oint dS = 0$	$\Delta S = k_B \ln \frac{W_e}{W_a} \geq 0; S = k_B \ln W$	W ... Anzahl mögl. Zustände; S ... Zustandsgröße		
Fundamentalgl. („FG“)	Enthalpie H	Helmholtz'sche freie Energie F	Freie Enthalpie („Gibbs'sche freie Energie“) G		
Innere Energie = zugef. Wärme + zugef. Arbeit $dU = d'Q + d'W$ $dU = TdS - p dV$	$H \equiv U + pV \xrightarrow{abl.FG \text{ einsetzen}} dH = T dS + p dV + V dp$ dp=0: Energ., um U um dU zu erh., wenn ein Teil der Energ. für p dV verw. wird.	$F \equiv U - TS \xrightarrow{abl.FG \text{ einsetzen}} dF = -S dT - p dV$ Extensives thermod. Potential: $dF \leq 0$	$G \equiv H - TS$ $G \equiv U + pV - TS \xrightarrow{abl.FG \text{ einsetzen}} dG = -S dT + V dp$ Extensives thermod. Potential: $dF \leq 0$		

Schwingungen

Freie ungedämpfte Oszillatoren			Mathematisches Pendel		Physikalisches Pendel		Torsionspendel	
Federpendel	$ma = -Dx$ $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{g}{x_{ruhe}}}$	$ma = -mg \sin \varphi$ $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$	$I \ddot{\varphi} = -mgd \sin \varphi$ $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$	$D = -T \varphi$ $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{T}{I}}$
Freie gedämpfte Oszillatoren			Schwache Dämpfung: $\gamma < \omega_0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$				Log. Dekrement	
Stokesche Reibung	$ma = -bv - Dx$ $\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}; \gamma = \frac{b}{2m}$	$x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) = e^{-\gamma t} A \cos(\omega t + \varphi);$ $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}; \varphi = -\arctan \frac{c_2}{c_1}; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$				$\delta = \gamma T = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)}$ $nach \tau = \frac{1}{\delta} \text{ ist } A = A_0 \frac{1}{e}$	
Starke Dämpfung $\gamma > \omega_0; \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$			Aperiodischer Grenzfall: $\gamma = \omega_0; \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$					
$x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t}); \alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$			$x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 + c_2 t)$					
Erzwungene Schwingung		$ma = -bv - Dx + F_0 \cos \omega t$			Phasenverschiebung		Amplitude	
$ma = -bv - Dx + F_0 \cos \omega t$ $\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = K \cos \omega t;$		$x(t) = A_1 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi) + A_2 \cos(\omega t + \varphi)$ $K = F_0/m; \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}; \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$			$\varphi = \arctan\left(-\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$		$A_2(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$	

Wellen

Ebene Welle in z-Richtung:	$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v_{ph}^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$	Allg Lsg:	$\xi(z, t) = f\left(t - \frac{z}{v}\right) + g\left(t + \frac{z}{v}\right)$	Longitudinal in festem Körper:	$v_{ph}^2 = \frac{E}{\rho}$	Transversal in Festkörper:	$v_{ph}^2 = \frac{G_m}{\rho}$
Harm. Welle in z-Richtung:	$\xi(z, t) = A \sin\left(\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right) = A \sin\left(\omega t - \frac{\omega z}{v}\right) = A \sin\left(\omega t - \frac{2\pi f z}{v}\right) = A \sin\left(\omega t - \frac{2\pi \cancel{f} z}{\cancel{v} \lambda}\right) = A \sin(\omega t - kz); k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (Wellen- zahl)						
Gassäule (nur longitudinal!)	$v_{ph}^2 = \frac{K_m}{\rho} = \frac{\kappa p}{\rho};$ $K_m \dots$ Komp. modul $\kappa \dots \frac{c_p}{c_v}$ Adiab. Idx.	Transversal, gesp. Saite:	$v_{ph}^2 = \frac{F}{\mu} = \frac{\sigma}{\rho}; \mu = \frac{m}{l}$	$\frac{p}{\rho} = \frac{pV}{nM} = \frac{nkT}{nm} = \frac{kT}{m} \Rightarrow v_{rms} = v_{ph} \sqrt{3}$			
Dispersion: $v_{ph} = f(\lambda)$	$v_{ph} = \frac{\omega}{k}; k = \frac{2\pi}{\lambda}$	Gruppen- geschw.:	$v_G = \frac{d\omega}{dk} = v_{ph} - \lambda \frac{dv_{ph}}{d\lambda}$				
Stehende Welle	Freies Ende: $\xi(z, t) = 2A \cos(k_n z) \cos(\omega t)$ Festes Ende: $\xi(z, t) = 2A \sin(k_n z) \sin(\omega t)$			$k_n = \frac{2\pi}{\lambda}$	2x offen $\vee$ 2x fest: $\lambda_n = \frac{2l}{n}; f_n = n \frac{v}{2l}; n \in \mathbb{N}_+$ 1x offen $\wedge$ 1x fest: $\lambda_n = \frac{4l}{2n-1}; f_n = (2n-1) \frac{v}{4l}; n \in \mathbb{N}_+$		
Doppler:	Beob. <u>zur</u> Quelle Sender <u>zum</u> Beob.	$f = f_0 \frac{1+v_b/c}{1-v_s/c}$	Beob. <u>von</u> Quelle <u>weg</u> Sender <u>von</u> Beob. <u>weg</u>	$f = f_0 \frac{1-v_b/c}{1+v_s/c}$	Reflektor bewegt sich <u>zum</u> Beob.	$f = f_0 \frac{c+v}{c-v}$	<u>vom</u> Be- ob. <u>weg</u> : $f = f_0 \frac{c-v}{c+v}$

Sonstiges

Kepler:	$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}; \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$	Reibung: $F_R = \mu F_N$	Wärme- ausdeh- nung	$\frac{\Delta L}{L_0} = \alpha \Delta T; [\alpha] = \left[\frac{1}{K}\right]$	$V = V_0(1 + \alpha \Delta T)^3$ $V \approx V_0(1 + \gamma \Delta T)$ $\gamma = 3\alpha$	
$ \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \sin \alpha$ (0 wenn $\parallel$)		$ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos \alpha$ (0 wenn $\perp$)		$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$		$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$